

HỆ THỐNG BÀI TẬP CĂN BẬC 2 LỚP 9



A - Căn bậc hai

- Định nghĩa:** Căn bậc hai của số a không âm là số x sao cho $x^2 = a$.
- Ký hiệu:**
 - ♦ $a > 0$: \sqrt{a} : Căn bậc hai của số a
 $-\sqrt{a}$: Căn bậc hai âm của số a
 - ♦ $a = 0$: $\sqrt{0} = 0$
- Chú ý:** Với $a \geq 0$: $(\sqrt{a})^2 = (-\sqrt{a})^2 = a$
- Căn bậc hai số học:**
 - ♦ Với $a \geq 0$: số \sqrt{a} được gọi là CBHSH của a
 - ♦ Phép khai phương là phép toán tìm CBHSH của số a không âm.
- So sánh các CBHSH:** Với $a \geq 0, b \geq 0$: $a \leq b \Leftrightarrow \sqrt{a} \leq \sqrt{b}$

1.1 Điền vào ô trống trong bảng sau:

x	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
x^2										

1.2 Tìm căn bậc hai số học rồi suy ra căn bậc hai của các số sau:

- a) 121 b) 144 c) 169 d) 225
e) 256 f) 324 g) 361 h) 400
i) 0,01 j) 0,04 k) 0,49 l) 0,64
m) 0,25 n) 0,81 o) 0,09 p) 0,16

1.3 Tính:

a) $\sqrt{0,09}$ b) $\sqrt{-16}$ c) $\sqrt{0,25} \cdot \sqrt{0,16}$ d) $\sqrt{(-4) \cdot (-25)}$
 e) $\sqrt{\frac{4}{25}}$ f) $\frac{6\sqrt{16}}{5\sqrt{0,04}}$ g) $\sqrt{0,36} - \sqrt{0,49}$

1.4 Trong các số sau, số nào có căn bậc hai:

a) $\sqrt{5}$ b) 1,5 c) -0,1 d) $-\sqrt{9}$

1.5 Trong các biểu thức sau, biểu thức nào có căn bậc hai:

a) $(x-4)(x-6)+1$ b) $(3-x)(x-5)-4$
 c) $-x^2+6x-9$ d) $-5x^2+8x-4$
 e) $x(x-1)(x+1)(x+2)+1$ f) $x^2+20x+101$

1.6 So sánh hai số sau (không dùng máy tính):

a) 1 và $\sqrt{2}$ b) 2 và $\sqrt{3}$ c) 6 và $\sqrt{41}$
 d) 7 và $\sqrt{47}$ e) 2 và $\sqrt{2}+1$ f) 1 và $\sqrt{3}-1$
 g) $2\sqrt{31}$ và 10 h) $\sqrt{3}$ và -12 i) -5 và $-\sqrt{29}$
 j) $2\sqrt{5}$ và $\sqrt{19}$ k) $\sqrt{\sqrt{3}}$ và $\sqrt{2}$ l) $\sqrt{2\sqrt{3}}$ và $\sqrt{3\sqrt{2}}$
 m) $2+\sqrt{6}$ và 5 n) $7-2\sqrt{2}$ và 4 o) $\sqrt{15}+\sqrt{8}$ và 7
 p) $\sqrt{37}-\sqrt{14}$ và $6-\sqrt{15}$ q) $\sqrt{17}+\sqrt{26}+1$ và $\sqrt{99}$

1.7 Dùng kí hiệu $\sqrt{\quad}$ viết nghiệm của các phương trình dưới đây, sau đó dùng máy tính để tính chính xác nghiệm với 3 chữ số thập phân.

a) $x^2=2$ b) $x^2=3$ c) $x^2=3,5$ d) $x^2=4,12$
 e) $x^2=5$ f) $x^2=6$ g) $x^2=2,5$ h) $x^2=\sqrt{5}$

1.8 Giải các phương trình sau:

a) $x^2=25$ b) $x^2=30,25$ c) $x^2=5$

d) $x^2 - \sqrt{3} = \sqrt{2}$ e) $x^2 - 5 = 0$ f) $x^2 + \sqrt{5} = 2$

g) $x^2 = \sqrt{3}$ h) $2x^2 + 3\sqrt{2} = 2\sqrt{3}$ i) $(x - 1)^2 = 1\frac{9}{16}$

j) $x^2 = (1 - \sqrt{3})^2$ k) $x^2 = 27 - 10\sqrt{2}$ l) $x^2 + 2x = 3 - 2\sqrt{3}$

1.9 Giải phương trình:

a) $\sqrt{x} = 3$ b) $\sqrt{x} = \sqrt{5}$ c) $\sqrt{x} = 0$ d) $\sqrt{x} = -2$

1.10 Trong các số: $\sqrt{(-7)^2}$, $\sqrt{(-7)}$, $-\sqrt{7^2}$, $-\sqrt{(-7)^2}$ thì số nào là căn bậc hai số học của 49 ?

1.11 Cho hai số dương a và b. Chứng minh rằng:

a) Nếu $a > b$ thì $\sqrt{a} > \sqrt{b}$ b) Nếu $\sqrt{a} > \sqrt{b}$ thì $a > b$

1.12 Cho số dương a. Chứng minh rằng:

a) Nếu $a > 1$ thì $\sqrt{a} > 1$ b) Nếu $a < 1$ thì $\sqrt{a} < 1$

1.13 Cho số dương a. Chứng minh rằng:

a) Nếu $a > 1$ thì $a > \sqrt{a}$ b) Nếu $a < 1$ thì $a < \sqrt{a}$

Một số tính chất bất đẳng

1. $a \leq b \Leftrightarrow b \geq a$

2. $\left. \begin{array}{l} a \leq b \\ b \leq c \end{array} \right\} \Leftrightarrow a \leq c$

3. $a \leq b \Leftrightarrow a + c \leq b + c$ (cộng 2 vế với c)

$\rightarrow a + c \leq b \Leftrightarrow a \leq b - c$ (cộng 2 vế với $-c$)

$\rightarrow a \leq b \Leftrightarrow a - b \leq 0$ (cộng 2 vế với $-b$)

$\rightarrow a \geq b \Leftrightarrow a - b \geq 0$ (cộng 2 vế với $-b$)

4. $\left. \begin{array}{l} a \leq b \\ c \leq d \end{array} \right\} \Leftrightarrow a + c \leq b + d$

5. $a \leq b \Leftrightarrow a \cdot c \leq b \cdot c$ (nếu $c > 0$: giữ nguyên chiều)

$a \leq b \Leftrightarrow a \cdot c \geq b \cdot c$ (nếu $c < 0$: đổi chiều)

6. $\left. \begin{array}{l} a > b > 0 \\ c > d > 0 \end{array} \right\} \Leftrightarrow a \cdot c > b \cdot d$

7. $a > b > 0 \Leftrightarrow a^n > b^n$ ($n \in \mathbb{N}^*$)

o $a > b > 0 \Leftrightarrow \frac{1}{a} < \frac{1}{b}$

B - Căn thức bậc hai. Hằng đẳng thức $\sqrt{A^2} = |A|$

1. Căn thức bậc hai:

✓ Nếu A là một biểu thức đại số thì \sqrt{A} gọi là căn thức bậc hai của A .

A được gọi là **biểu thức lấy căn** hay **biểu thức dưới dấu căn**.

✓ \sqrt{A} các định (có nghĩa) khi $A \geq 0$

☞ **Chú ý:**

a) Điều kiện có nghĩa của một số biểu thức:

▪ $A(x)$ là một đa thức $\Rightarrow A(x)$ luôn có nghĩa.

▪ $\frac{A(x)}{B(x)}$ có nghĩa $\Leftrightarrow B(x) \neq 0$

$$\blacksquare \sqrt{A(x)} \text{ có nghĩa} \Leftrightarrow A(x) \geq 0$$

$$\blacksquare \frac{1}{\sqrt{A(x)}} \text{ có nghĩa} \Leftrightarrow A(x) > 0$$

b) Với $M > 0$, ta có:

$$\blacksquare X^2 \leq M^2 \Leftrightarrow |X| \leq |M| \Leftrightarrow -M \leq X \leq M$$

$$\blacksquare X^2 \geq M^2 \Leftrightarrow |X| \geq |M| \Leftrightarrow X \leq -M \text{ hoặc } X \geq M$$

2. **Hằng đẳng thức** $\sqrt{(A)^2} = |A|$

$$\checkmark \text{ Định lý: Với mọi số } a, \text{ ta có: } \sqrt{a^2} = |a| = \begin{cases} a & \text{khi } a \geq 0 \\ -a & \text{khi } a < 0 \end{cases}$$

\checkmark **Chú ý:** Tổng quát, với A là một biểu thức đại số, ta cũng có:

$$\sqrt{A^2} = |A| = \begin{cases} A & \text{khi } A \geq 0 \\ -A & \text{khi } A < 0 \end{cases}$$

1.14 Tìm x để biểu thức sau có nghĩa:

1. a) $\sqrt{-2x+3}$

b) $\sqrt{-5x}$

c) $\sqrt{-3x+7}$

d) $\sqrt{3x+7}$

e) $\sqrt{\frac{x}{3}}$

f) $\sqrt{-5x}$

g) $\sqrt{4-x}$

h) $\sqrt{1+x^2}$

i) $\sqrt{\frac{-5}{x^2+6}}$

j) $\sqrt{\frac{2}{x^2}}$

k) $\sqrt{\frac{1}{-1+x}}$

l) $\sqrt{\frac{4}{x+3}}$

m)

n) $\sqrt{4x^2}$ o) $\sqrt{-3x^2}$

o) $\sqrt{x^2-2x+1}$

p) $\sqrt{-x^2-2x-1}$

2. a) $\sqrt{-x^2+4x-5}$

b) $\sqrt{x^2+2x+2}$

c) $\frac{1}{\sqrt{4x^2 - 12x + 9}}$

d) $\frac{1}{\sqrt{x^2 - x + 1}}$

e) $\frac{1}{\sqrt{x^2 - 8x + 15}}$

f) $\frac{1}{\sqrt{3x^2 - 7x + 20}}$

3. a) $\sqrt{x+3} + \sqrt{x^2-9}$

b) $\sqrt{x-2} + \frac{1}{x-5}$

c) $\frac{2}{x^2-9} - \sqrt{5-2x}$

d) $\sqrt{2x-4} + \sqrt{8-x}$

e) $\frac{\sqrt{4-x}}{\sqrt{x+1}} + \sqrt{9-x^2}$

f) $\sqrt{x^2-4} + 2\sqrt{x-2}$

4. a) $\sqrt{(x-1)(x-3)}$

b) $\sqrt{\frac{4}{x+3}}$

c) $\sqrt{\frac{2+x}{5-x}}$

d) $\sqrt{\frac{x-1}{x+2}}$

1.15 Tính

a) $5\sqrt{(-2)^4}$

b) $-4\sqrt{(-3)^6}$

c) $5\sqrt{\sqrt{(-5)^8}}$

d) $-0,4\sqrt{(-0,4)^2}$

e) $\sqrt{(0,1)^2}$

f) $\sqrt{(-0,3)^2}$

g) $-\sqrt{(-1,3)^2}$

h) $2\sqrt{(-2)^4} + 3\sqrt{(-2)^8}$

1.16 Chứng minh rằng:

a) $9 + 4\sqrt{5} = (\sqrt{5} + 2)^2$

b) $\sqrt{9 - 4\sqrt{5}} - \sqrt{5} = -2$

c) $23 - 8\sqrt{7} = (4 - \sqrt{7})^2$

d) $\sqrt{17 - 12\sqrt{2}} + 2\sqrt{2} = 3$

1.17 Rút gọn biểu thức:

1. a) $\sqrt{(4 - 3\sqrt{2})^2}$

b) $\sqrt{(2 + \sqrt{5})^2}$

c) $\sqrt{(4+\sqrt{2})^2}$

d) $2\sqrt{3} + \sqrt{(2-\sqrt{3})^2}$

e) $\sqrt{(2-\sqrt{3})^2}$

f) $\sqrt{(2-\sqrt{5})^2}$

g) $\sqrt{(\sqrt{3}-1)^2} + \sqrt{(\sqrt{3}-2)^2}$

h) $\sqrt{(2-\sqrt{5})^2} - \sqrt{(\sqrt{5}-1)^2}$

2. a) $\sqrt{6-2\sqrt{5}}$

b) $\sqrt{7+4\sqrt{3}}$

c) $\sqrt{12-6\sqrt{3}}$

d) $\sqrt{17+12\sqrt{2}}$

e) $\sqrt{22-12\sqrt{2}}$

f) $\sqrt{10-4\sqrt{6}}$

g) $\frac{\sqrt{2}-\sqrt{11+6\sqrt{2}}}{\sqrt{6+2\sqrt{5}}-\sqrt{5}}$

h) $\sqrt{\frac{3+\sqrt{5}}{\sqrt{3}-\sqrt{5}}} + \sqrt{\frac{3-\sqrt{5}}{\sqrt{3}+\sqrt{5}}}$

3. a) $\sqrt{4-2\sqrt{3}} - \sqrt{3}$

b) $\sqrt{11+6\sqrt{2}} - 3 + \sqrt{2}$

c) $\sqrt{11-6\sqrt{2}} - \sqrt{6-4\sqrt{2}}$

d) $\sqrt{11-6\sqrt{3}} + \sqrt{13-4\sqrt{3}}$

e) $(\sqrt{3}+4)\sqrt{19-8\sqrt{3}}$

f) $\sqrt{8+2\sqrt{7}}\sqrt{\frac{4-\sqrt{7}}{2}}$

g) $\frac{\sqrt{2}-\sqrt{11+6\sqrt{2}}}{\sqrt{6+2\sqrt{5}}-\sqrt{5}}$

h) $\sqrt{\frac{3+\sqrt{5}}{\sqrt{3}-\sqrt{5}}} + \sqrt{\frac{3-\sqrt{5}}{\sqrt{3}+\sqrt{5}}}$

4. a) $\sqrt{6+2\sqrt{4-2\sqrt{3}}}$

b) $\sqrt{6-2\sqrt{3+\sqrt{13+4\sqrt{3}}}}$

c) $\sqrt{\sqrt{3}+\sqrt{48-10\sqrt{7+4\sqrt{3}}}}$

d) $\sqrt{23-6\sqrt{10+4\sqrt{3-2\sqrt{2}}}}$

5. a) $\frac{x^2-5}{x+\sqrt{5}}$

b) $\frac{x^2+2\sqrt{2}x+2}{x^2-2}$

1.18 Rút gọn biểu thức sau (loại bỏ dấu căn và dấu trị tuyệt đối):

1. a) $\sqrt{9x^2} - 2x$ với $x < 0$

b) $2\sqrt{x^2}$ với $x \geq 0$

c) $3\sqrt{(x-2)^2}$ với $x < 2$ d) $2\sqrt{x^2} - 5x$ với $x < 0$

e) $\sqrt{25x^2} + 3x$ với $x \geq 0$ f) $\sqrt{9x^4} + 3x^2$ với x bất kỳ

g) $x - 4 + \sqrt{16 - 8x + x^2}$ với $x > 4$

2. a) $A = \sqrt{1 - 4a + 4a^2} - 2a$ b) $B = \sqrt{4x^2 - 12x + 9} + 2x - 1$

c) $C = \frac{5-x}{\sqrt{x^2 - 10x + 25}}$ d) $D = \sqrt{(x-1)^2} + \frac{x-1}{\sqrt{x^2 - 2x + 1}}$

e) $E = \frac{\sqrt{x^2 - 6x + 9}}{x-3}$ f) $F = x^2 - \sqrt{x^4 + 8x^2 + 16}$

1.19 Chứng tỏ: $x + 2\sqrt{2x-4} = (\sqrt{2} + \sqrt{x-2})^2$ với $x \geq 2$

Áp dụng rút gọn biểu thức sau:

$$\sqrt{x + 2\sqrt{2x-4}} + \sqrt{x + 2\sqrt{2x-4}} \text{ với } x \geq 2$$

1.20 Rút gọn biểu thức sau (*loại bỏ dấu căn và dấu trị tuyệt đối*):

a) $\sqrt{x-4}\sqrt{x-4}$ với $x \geq 4$

b) $\sqrt{x-2+2\sqrt{x-3}}$ với $x \geq 3$

c) $\sqrt{x+2\sqrt{x-1}} + \sqrt{x-2\sqrt{x-1}}$ với $x \geq 1$

d) $\sqrt{x-2\sqrt{x}+1} + \sqrt{x+2\sqrt{x}+1}$ với $x \geq 0$

1.21 Với giá trị nào của a và b thì:

a) $\frac{1}{\sqrt{a^2 - 2ab + b^2}} = \frac{1}{b-a}$? b) $\sqrt{a^2(b^2 - 2b + 1)} = a(1-b)$?

1.22 So sánh hai số sau (không dùng máy tính):

a) 9 và $6 + 2\sqrt{2}$ b) $\sqrt{2} + \sqrt{3}$ và 3

c) 16 và $9 + 4\sqrt{5}$

d) $\sqrt{11} - \sqrt{3}$ và 2

1.23 Rút gọn rồi tính giá trị của biểu thức:

a) $A = \sqrt{9x^2 - 12x + 4} + 1 - 3x$ tại $x = \frac{1}{3}$

b) $B = \sqrt{2x^2 - 6x\sqrt{2} + 9}$ tại $x = 3\sqrt{2}$

1.24 Giải phương trình:

a) $\sqrt{9x^2} = 2x + 1$

b) $\sqrt{x^4} = 7$

c) $\sqrt{x^2 + 6x + 9} = 3x - 1$

d) $\sqrt{x^2} = 7$

e) $\sqrt{x^2} = |-8|$

f) $\sqrt{1 - 4x + 4x^2} = 5$

g) $\sqrt{x^4} = 9$

h) $\sqrt{(x+2)^2} = 2x + 1$

i) $\sqrt{x^2 - 6x + 9} = 5$

j) $\sqrt{4x^2 - 12x + 9} = x - 3$

k) $\sqrt{4x^2 - 4x + 1} = \sqrt{x^2 - 2x + 1}$ l) $\sqrt{4x^2 - 12x + 9} = \sqrt{9x^2 - 24x + 16}$

1.25 Phân tích thành nhân tử:

a) $x^2 - 7$

b) $x^2 - 3$

c) $x^2 - 2\sqrt{13}x + 13$

d) $x^2 - \sqrt{3}$

e) $x^2 - 2\sqrt{2}x + 2$

f) $x^2 + 2\sqrt{5}x + 5$

1.26 Với n là số tự nhiên, chứng minh:

$$\sqrt{(n+1)^2} + \sqrt{n^2} = (n+1)^2 - n^2$$

Viết dạng thức trên khi n là 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7.

1.27 Cho ba số a, b, c khác 0 và $a + b + c = 0$. Chứng minh rằng:

$$\sqrt{\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}} = \left| \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \right|$$

1.28 Tính: $\sqrt{1+2013^2 + \frac{2013^2}{2014^2} + \frac{2013}{2014}}$.

1.29 Chứng minh bất đẳng thức Côsi (Cauchy):

$$x + y \geq 2 \sqrt{xy}$$

Dấu “=” xảy ra khi nào ?

Áp dụng: Chứng minh rằng với x, y, z là các số dương, ta có:

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \geq \frac{1}{\sqrt{xy}} + \frac{1}{\sqrt{yz}} + \frac{1}{\sqrt{zx}}$$

C - Khai phương một tích. Nhân các căn thức bậc hai.

D - Khai phương một thương. Chia các căn thức bậc hai

1. Với $A \geq 0, B \geq 0$: $\sqrt{AB} = \sqrt{A}\sqrt{B}$

2. Với $A \geq 0, B > 0$: $\sqrt{\frac{A}{B}} = \frac{\sqrt{A}}{\sqrt{B}}$

1.30 Tính:

1. a) $\sqrt{0,09.64}$ b) $\sqrt{2^4 \cdot (-7)^2}$ c) $\sqrt{12,1.360}$

d) $\sqrt{2^2 \cdot 3^4}$ e) $\sqrt{45.80}$ f) $\sqrt{75.48}$

g) $\sqrt{90.6,4}$ h) $\sqrt{2,5.14,4}$

2. a) $\sqrt{7} \cdot \sqrt{63}$ b) $\sqrt{2,5} \cdot \sqrt{30} \cdot \sqrt{48}$ c) $\sqrt{0,4} \cdot \sqrt{6,4}$

d) $\sqrt{2,7} \cdot \sqrt{5} \cdot \sqrt{1,5}$ e) $\sqrt{10} \cdot \sqrt{40}$ f) $\sqrt{5} \cdot \sqrt{45}$

g) $\sqrt{52} \cdot \sqrt{13}$ h) $\sqrt{2} \cdot \sqrt{162}$

3. a) $\sqrt{13^2 - 12^2}$ b) $\sqrt{17^2 - 8^2}$ c) $\sqrt{117^2 - 108^2}$

d) $\sqrt{313^2 - 312^2}$ e) $\sqrt{6,8^2 - 3,2^2}$ f) $\sqrt{21,8^2 - 18,2^2}$

g) $\sqrt{146,5^2 - 109,5^2 + 27.256}$

4. a) $\sqrt{2-\sqrt{3}} \cdot \sqrt{2+\sqrt{3}}$ b) $\sqrt{3\sqrt{2}-2\sqrt{3}} \cdot \sqrt{3\sqrt{2}+2\sqrt{3}}$
 c) $(\sqrt{\sqrt{3}+\sqrt{2}} + \sqrt{\sqrt{3}-\sqrt{2}})^2$ d) $(1+\sqrt{2}-\sqrt{3}) \cdot (1-\sqrt{2}+\sqrt{3})$
5. a) $\sqrt{\frac{9}{169}}$ b) $\sqrt{\frac{25}{144}}$ c) $\sqrt{1\frac{9}{16}}$
 d) $\sqrt{2\frac{7}{81}}$ e) $\sqrt{0,0025}$ f) $\sqrt{3,6.16,9}$
6. a) $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{18}}$ b) $\frac{\sqrt{15}}{\sqrt{735}}$ c) $\frac{\sqrt{12500}}{\sqrt{500}}$
 d) $\frac{\sqrt{6^5}}{\sqrt{2^3 \cdot 3^5}}$ e) $\frac{\sqrt{2300}}{\sqrt{23}}$ f) $\frac{\sqrt{12,5}}{\sqrt{0,5}}$
7. a) $\sqrt{1\frac{9}{16} \cdot 5\frac{4}{9} \cdot 0,01}$ b) $\sqrt{\frac{165^2 - 124^2}{164}}$
 c) $\sqrt{\frac{149^2 - 76^2}{457^2 - 384^2}}$ d) $\sqrt{1,44.1,21 - 1,44.0,4}$
8. a) $\frac{2\sqrt{12} - 3\sqrt{27} + 5\sqrt{3}}{\sqrt{3}}$ b) $\frac{\sqrt{32} - \sqrt{50} + \sqrt{8}}{\sqrt{2}}$

1.31 Tính:

Với $m, n > 0$ thỏa $m + n = A$ và $m \cdot n = B$
 ta có: $A \pm 2\sqrt{B} = m + n \pm 2\sqrt{m \cdot n} = (\sqrt{m} \pm \sqrt{n})^2$

1. a) $\sqrt{8+2\sqrt{15}} - \sqrt{6+2\sqrt{5}}$ b) $\sqrt{17-2\sqrt{72}} + \sqrt{19+2\sqrt{18}}$
 c) $\sqrt{12-2\sqrt{32}} + \sqrt{9+4\sqrt{2}}$ d) $\sqrt{29-2\sqrt{180}} - \sqrt{9+4\sqrt{5}}$
 e) $\sqrt{4-\sqrt{7}} - \sqrt{4+\sqrt{7}} + \sqrt{2}$ f) $\sqrt{6+\sqrt{11}} - \sqrt{6-\sqrt{11}} + 3\sqrt{2}$
 g) $\sqrt{8-2\sqrt{15}} - \sqrt{7-2\sqrt{10}}$ h) $\sqrt{10-2\sqrt{21}} - \sqrt{9-2\sqrt{14}}$

i) $\sqrt{8-3\sqrt{7}} + \sqrt{4-\sqrt{7}}$

j) $\sqrt{5+\sqrt{21}} - \sqrt{5-\sqrt{21}}$

k) $\sqrt{9-3\sqrt{5}} - \sqrt{9+3\sqrt{5}}$

l) $(\sqrt{10}-\sqrt{2})\sqrt{4+\sqrt{6-2\sqrt{5}}}$

2. a) $\sqrt{(4-2\sqrt{3})(13+4\sqrt{3})}$

b) $(\sqrt{3}-2)(\sqrt{6}+\sqrt{2})\sqrt{\sqrt{3}+2}$

c) $(3+\sqrt{5})(\sqrt{10}-\sqrt{2})\sqrt{3-\sqrt{5}}$

d) $(4+\sqrt{15})(\sqrt{10}-\sqrt{6})\sqrt{4-\sqrt{15}}$

e) $\sqrt{4-\sqrt{15}} + \sqrt{4+\sqrt{15}} - 2\sqrt{3-\sqrt{5}}$

f) $\sqrt{4+\sqrt{8}} \cdot \sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}} \cdot \sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2}}}$

g) $(5+4\sqrt{2}) \cdot (3+2\sqrt{1+\sqrt{2}}) \cdot (3-2\sqrt{1-\sqrt{2}})$

h) $\sqrt{2+\sqrt{3}} \cdot \sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}} \cdot \sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}} \cdot \sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}}$

3*. $A = \sqrt{\sqrt{7}+5-2\sqrt{\sqrt{7}+4}} + 1$

ĐS: $A = \frac{\sqrt{2}(\sqrt{7}+1)}{2}$

$B = \sqrt{4+\sqrt{3}+\sqrt{6\sqrt{3}+15}} - \sqrt{\sqrt{3}+\frac{5}{2}}$

ĐS: $B = \frac{\sqrt{6}}{2}$

$C = \sqrt{1+2\sqrt{5\sqrt{5}-11}} - \sqrt{\sqrt{5}-2}$

ĐS: $C = \frac{\sqrt{2}(\sqrt{5}-1)}{2}$

$D = \frac{\sqrt{1+2\sqrt{27\sqrt{2}-38}} - \sqrt{5-3\sqrt{2}}}{\sqrt{3\sqrt{2}-4}}$

ĐS: $D = 1$

$E = \left(\sqrt{5-2\sqrt{2\sqrt{2}-2}} + \sqrt{2}-1 \right) \sqrt{\sqrt{2}-1}$

ĐS: $E = \sqrt{2}$

1.32 Phân tích thành tích số:

a) $1+\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{6}$

b) $\sqrt{6}+\sqrt{55}-\sqrt{10}-\sqrt{33}$

1.33 Rút gọn biểu thức sau (loại bỏ dấu căn và dấu trị tuyệt đối):

1. a) $\sqrt{0,36x^2}$ với $x < 0$ b) $\sqrt{x^4(3-x)^2}$ với $x \geq 3$

c) $\sqrt{27.48(1-x)^2}$ với $x > 1$ d) $\frac{1}{x-y} \cdot \sqrt{x^4(x-y)^2}$ a, b > 0

e) $\sqrt{4.(x-3)^2}$ với $x \geq 3$ f) $\sqrt{9.(x-2)^2}$ với $x < 2$

g) $\sqrt{x^2.(x+1)^2}$ với $x > 0$ h) $\sqrt{x^2(x-1)^2}$ với $x < 0$

i) $\sqrt{\frac{2x}{3}} \cdot \sqrt{\frac{3x}{8}}$ với $x \geq 0$ j) $\sqrt{13x} \cdot \sqrt{\frac{52}{x}}$ với $x > 0$

k) $\sqrt{5x} \cdot \sqrt{45x} - 3x$ với x bất kỳ l) $(3-x)^2 - \sqrt{0,2} \cdot \sqrt{180x^2}$, $\forall x$

2. a) $\frac{\sqrt{63y^3}}{\sqrt{7y}}$ với $y > 0$ b) $\frac{\sqrt{48x^3}}{\sqrt{3x^5}}$ với $x > 0$

c) $\frac{\sqrt{45mn^2}}{\sqrt{20m}}$ với $m > 0, n > 0$ d) $\frac{\sqrt{16x^4y^6}}{\sqrt{128x^6y^6}}$ với $x < 0$ và $y \neq 0$

e) $\frac{x}{y} \cdot \sqrt{\frac{x^2}{y^4}}$ với $x > 0, y \neq 0$ f) $2y^2 \cdot \sqrt{\frac{x^4}{4y^2}}$ với $y < 0$

g) $5xy \cdot \sqrt{\frac{25x^2}{y^6}}$ với $x < 0, y > 0$ h) $0,2x^3y^3 \cdot \sqrt{\frac{16}{x^4y^8}}$ với $x \neq 0, y \neq 0$

i) $xy^2 \cdot \sqrt{\frac{3}{x^2y^4}}$ với $x < 0, y \neq 0$ j) $\sqrt{\frac{27(x-3)^2}{48}}$ với $x > 3$

k) $(x-y) \cdot \sqrt{\frac{xy}{(x-y)^2}}$ với $x < y, y < 0$

l) $\sqrt{\frac{9+12x+4x^2}{y^2}}$ với $x > -1,5$ và $y < 0$

1.34 Chứng minh:

a) $(2-\sqrt{3})(2+\sqrt{3})=1$ b) $\sqrt{9-\sqrt{17}} \cdot \sqrt{9+\sqrt{17}}=8$

c) $(\sqrt{2014} - \sqrt{2013}) \cdot (\sqrt{2014} + \sqrt{2013}) = 1$

d) $2\sqrt{2}(\sqrt{3} - 2) + (1 + 2\sqrt{2})^2 - 2\sqrt{6} = 9$

1.35 Rút gọn các biểu thức sau:

1. a) $\frac{\sqrt{6} + \sqrt{14}}{2\sqrt{3} + \sqrt{28}}$

b) $\frac{\sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{6} + \sqrt{8} + \sqrt{16}}{\sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{4}}$

2. a) $\sqrt{\frac{x - 2\sqrt{x} + 1}{x + 2\sqrt{x} + 1}}$ với $x \geq 0$

b) $\frac{x - 1}{\sqrt{y} - 1} \sqrt{\frac{(y - 2\sqrt{y} + 1)^2}{(x - 1)^4}}$, $x \neq 1, y \neq 1, y > 0$

1.36 Rút gọn rồi tính giá trị của các biểu thức sau:

1. a) $\sqrt{4(1 + 6x + 9x^2)^2}$ tại $x = -\sqrt{2}$

b) $\sqrt{9a^2(b^2 + 4 - 4b)}$ tại $a = 2, b = -\sqrt{3}$

2. a) $4x - 8 + \frac{\sqrt{x^3 + 2x^2}}{\sqrt{x + 2}}$ tại $x = -\sqrt{2}$

b) $\sqrt{\frac{(x - 2)^4}{(3 - x)^2} + \frac{x^2 - 1}{x - 3}}$ (với $x < 3$) tại $x = 0,5$

1.37 So sánh hai số sau (không dùng máy tính):

a) $\sqrt{2} + \sqrt{3}$ và $\sqrt{10}$

b) $\sqrt{3} + 2$ và $\sqrt{2} + \sqrt{6}$

c) 16 và $\sqrt{15} \cdot \sqrt{17}$

d) 8 và $\sqrt{15} + \sqrt{17}$

1.38 So sánh $\sqrt{2012} + \sqrt{2014}$ và $2 \cdot \sqrt{2013}$

1.39 Giải phương trình:

1. a) $\sqrt{16x} = 8$

b) $\sqrt{4x} = \sqrt{5}$

c) $\sqrt{4(x^2 - 2x + 1)} - 6 = 0$

d) $\sqrt{9(x - 1)x} = 21$

e) $\sqrt{x-5} = 3$

f) $\sqrt{x-10} = -2$

g) $\sqrt{2x-1} = \sqrt{5}$

h) $\sqrt{4-5x} = 12$

2. a) $\sqrt{4x^2} = x+5$

b) $\sqrt{(x-3)^2} = 2x-1$

c) $\sqrt{3x} = \sqrt{6}$

d) $\sqrt{7(x-1)} = \sqrt{21}$

3. a) $\sqrt{2} \cdot x - \sqrt{50} = 0$

b) $\sqrt{2+x} - \sqrt{8} = 0$

1.40 Giải các phương trình:

a) $\sqrt{\frac{2x-3}{x-1}} = 2$ và $\frac{\sqrt{2x-3}}{\sqrt{x-1}} = 2$ b) $\sqrt{\frac{4x+3}{x+1}} = 3$ và $\frac{\sqrt{4x+3}}{\sqrt{x+1}} = 3$

1.41 Cho hai biểu thức: $A = \sqrt{x+2} \cdot \sqrt{x-3}$ và $B = \sqrt{(x+2)(x-3)}$

a) Tìm x để A có nghĩa. Tìm x để B có nghĩa.

b) Với giá trị nào của x thì B có nghĩa còn A không có nghĩa.

c) Với giá trị nào của x thì $A = B$.

1.42 Cho hai biểu thức: và $A = \sqrt{\frac{2x+3}{x-3}}$ $B = \frac{\sqrt{2x+3}}{\sqrt{x-3}}$.

a) Tìm x để A có nghĩa. Tìm x để B có nghĩa.

b) Với giá trị nào của x thì B có nghĩa còn A không có nghĩa.

c) Với giá trị nào của x thì $A = B$.

1.43 Cho $a = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ và $b = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$. Tính $a^2 + b^2$ và $a^5 + b^5$.

1.44 Cho $a = \sqrt{4 + \sqrt{10 + 2\sqrt{5}}}$ và $b = \sqrt{4 - \sqrt{10 + 2\sqrt{5}}}$.

Tính $a^2 + b^2$ và ab . Suy ra giá trị của $a + b$.

1.45 Thực hiện phép tính:

$$a) A = \sqrt{12-3\sqrt{7}} - \sqrt{12+3\sqrt{7}}$$

$$b) B = \frac{\sqrt{7+\sqrt{5}} + \sqrt{7-\sqrt{5}}}{\sqrt{7+\sqrt{11}}} - \sqrt{3-2\sqrt{2}}$$

$$c) C = \sqrt{8+2\sqrt{10+2\sqrt{5}}} + \sqrt{8-2\sqrt{10+2\sqrt{5}}}$$

1.46 Rút gọn rồi tính giá trị của biểu thức sau:

$$A = \sqrt{10a^2 - 12a\sqrt{10} + 36} \quad \text{với } x = x = \sqrt{\frac{2}{5}} - \sqrt{\frac{5}{2}}$$

1.47 Cho hai số a và b với $a > 0, b > 0$. Chứng minh: $\sqrt{a+b} < \sqrt{a} + \sqrt{b}$.

Áp dụng: So sánh $\sqrt{25+9}$ và $\sqrt{25} + \sqrt{9}$

1.48 Cho hai số a và b với $a > b > 0$. Chứng minh: $\sqrt{a} - \sqrt{b} < \sqrt{a-b}$.

Áp dụng: So sánh $\sqrt{25-9}$ và $\sqrt{25} - \sqrt{9}$

1.49 Với n là số tự nhiên, chứng minh:

$$(\sqrt{n+1} - \sqrt{n})^2 = \sqrt{(2n+1)^2} - \sqrt{(2n+1)^2 - 1}$$

Viết đẳng thức trên khi n là 1; 2; 3; 4.

1.50 Cho hai số $a \geq 0, b \geq 0$. Chứng minh:

$$a) \frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$$

$$b) \sqrt{\frac{a+b}{2}} \geq \frac{\sqrt{a} + \sqrt{b}}{2}$$

1.51 Chứng minh:

a) $\sqrt{3}$ là số vô tỉ.

b) $5\sqrt{2}$ và $3 + \sqrt{2}$ đều là số vô tỉ.

1.52 Giải các bất phương trình sau và biểu diễn nghiệm trên trục số:

$$a) \sqrt{x} > 2$$

$$b) \sqrt{x} < 3$$

E - Biến đổi đơn giản căn thức bậc hai

1. Đưa thừa số ra ngoài dấu căn:

$$\sqrt{A^2B} = |A|\sqrt{B} = \begin{cases} A\sqrt{B} & \text{khi } A \geq 0 \\ -A\sqrt{B} & \text{khi } A < 0 \end{cases} \quad (B \geq 0)$$

2. Đưa thừa số vào trong dấu căn:

- Với $A \geq 0$, ta có: $A\sqrt{B} = \sqrt{A^2B}$ ($B \geq 0$)
- Với $A < 0$, ta có: $A\sqrt{B} = -\sqrt{A^2B}$ ($B \geq 0$)

3. Khử mẫu của biểu thức dưới dấu căn:

$$\sqrt{\frac{A}{B}} = \sqrt{\frac{A \cdot B}{B^2}} = \frac{\sqrt{A \cdot B}}{|B|} \quad \text{với } A, B \geq 0, B \neq 0$$

4. Trục căn thức ở mẫu:

- Phân tích tử và mẫu thành nhân tử tối rút gọn cho nhân tử chung chứa căn thức (nếu có).
- Trường hợp mẫu là biểu thức dạng tích các căn thức và các số:

$$\frac{A}{B\sqrt{C}} = \frac{A\sqrt{C}}{B \cdot C} \quad (B \neq 0; C > 0)$$

- Nếu mẫu là một biểu thức dạng tổng có chứa căn, nhân tử và mẫu với biểu thức liên hợp của mẫu:

$$\Rightarrow \frac{C}{\sqrt{A \pm B}} = \frac{C(\sqrt{A} \mp B)}{A - B^2} \quad \text{với } A \geq 0, A \neq B^2$$

$$\Rightarrow \frac{C}{\sqrt{A \pm \sqrt{B}}} = \frac{C(\sqrt{A} \mp \sqrt{B})}{A - B} \quad \text{với } A \geq 0, B \geq 0, A \neq B^2$$

1.53 Đưa nhân tử ra ngoài dấu căn:

- a) $\sqrt{54}$ b) $\sqrt{108}$
c) $0,1\sqrt{20000}$ d) $-0,05\sqrt{28800}$
- a) $\sqrt{7x^2}$ với $x > 0$ b) $\sqrt{48y^4}$

c) $\sqrt{25x^3}$ với $x > 0$

d) $\sqrt{8y^2}$ với $y > 0$

Đưa nhân tử vào trong dấu căn:

1. a) $3\sqrt{5}$

b) $-5\sqrt{2}$

c) $2\sqrt{2}$

d) $3\sqrt{2}$

2. a) $-\frac{2}{3}\sqrt{xy}$

b) $x\sqrt{5}$ với $x \geq 0$

c) $x\sqrt{13}$ với $x < 0$

d) $x\sqrt{\frac{2}{x}}$ với $x > 0$

1.54 So sánh hai số sau (không dùng máy tính):

a) $3\sqrt{3}$ và $\sqrt{12}$

b) 20 và $3\sqrt{5}$

c) $\frac{1}{3}\sqrt{54}$ và $\frac{1}{5}\sqrt{150}$

d) $\frac{1}{2}\sqrt{6}$ và $6\sqrt{\frac{1}{2}}$

e) $\frac{\sqrt{5}}{3\sqrt{7} + 5\sqrt{2}}$ và $\frac{3}{13}$

f) $\sqrt{30} - \sqrt{29}$ và $\sqrt{29} - \sqrt{28}$

g) $\sqrt{2012} + \sqrt{2014}$ và $2\sqrt{2013}$

h) $\sqrt{2014} - \sqrt{2013}$ và $\sqrt{2013} - \sqrt{2012}$

1.55 Sắp xếp theo thứ tự tăng dần:

a) $2\sqrt{5}$, $2\sqrt{6}$, $\sqrt{29}$, $3\sqrt{5}$

b) $3\sqrt{6}$, $3\sqrt{3}$, $4\sqrt{7}$, $2\sqrt{14}$

1.56 Rút gọn các biểu thức sau:

1. a) $\sqrt{75} + \sqrt{48} - \sqrt{300}$

b) $\sqrt{98} - \sqrt{72} + 0,5\sqrt{8}$

c) $\sqrt{9a} - \sqrt{16a} + \sqrt{49a}$ ($a \geq 0$)

d) $\sqrt{160b} + 2\sqrt{40b} - 3\sqrt{90b}$ ($b \geq 0$)

2. a) $3\sqrt{2} - 4\sqrt{18} + 2\sqrt{32} - \sqrt{50}$

b) $5\sqrt{48} - 4\sqrt{27} - 2\sqrt{75} + \sqrt{108}$

- c) $\sqrt{125} - 2\sqrt{20} - 3\sqrt{80} + 4\sqrt{45}$ d) $2\sqrt{28} + 2\sqrt{63} - 3\sqrt{175} + \sqrt{112}$
3. a) $(2\sqrt{3} + \sqrt{5})\sqrt{3} - \sqrt{60}$ b) $(5\sqrt{2} + 2\sqrt{5})\sqrt{5} - \sqrt{250}$
- c) $(\sqrt{28} - \sqrt{12} - \sqrt{7})\sqrt{7} + 2\sqrt{21}$ d) $(\sqrt{99} - \sqrt{18} - \sqrt{11})\sqrt{11} + 3\sqrt{22}$
4. a) $2\sqrt{40\sqrt{12}} - 2\sqrt{\sqrt{75}} - 3\sqrt{5\sqrt{48}}$ b) $2\sqrt{80\sqrt{3}} - 2\sqrt{5\sqrt{3}} - 3\sqrt{20\sqrt{3}}$
5. a) $(1 - \sqrt{x})(1 + \sqrt{x} + x)$ b) $(\sqrt{x} + 2)(x - 2\sqrt{x} + 4)$
- c) $(\sqrt{x} - \sqrt{y})(x + y + \sqrt{xy})$ d) $(x + \sqrt{y})(x^2 + y + x\sqrt{y})$
6. a) $(4\sqrt{x} - \sqrt{2x})(\sqrt{x} - \sqrt{2x})$ b) $(2\sqrt{x} + \sqrt{y})(3\sqrt{x} - 2\sqrt{y})$
7. a) $\frac{2}{2x-1}\sqrt{5x^2(1-2x)^2}$ với $x > 0,5$
- b) $\frac{2}{x^2-y^2}\sqrt{\frac{3(x+y)^2}{2}}$ với $x, y > 0$ và $x \neq y$

1.57 Rút gọn các biểu thức sau:

- a) $5\sqrt{\frac{1}{5}} + \frac{1}{2}\sqrt{20} + \sqrt{5}$ b) $\sqrt{\frac{1}{2}} + \sqrt{4,5} + \sqrt{12,5}$
- c) $\sqrt{20} - \sqrt{45} + 3\sqrt{18} + \sqrt{72}$ d) $\sqrt{20} - \sqrt{45} + 3\sqrt{18} + \sqrt{72}$
- e) $(\sqrt{6} + \sqrt{5})^2 - \sqrt{120}$ f) $\sqrt{72} - \sqrt{5\frac{1}{3}} + 4,5\sqrt{2\frac{2}{3}} + 2\sqrt{27}$
- g) $(\sqrt{28} - 2\sqrt{3} + \sqrt{7})\sqrt{7} + \sqrt{84}$ h) $\frac{1}{2}\sqrt{48} - 2\sqrt{75} - \sqrt{54} + 5\sqrt{1\frac{1}{3}}$

1.58 Rút gọn các biểu thức sau (biết $a > 0$, $b > 0$):

- a) $5\sqrt{a} - 3\sqrt{25a^3} + 2\sqrt{36ab^2} - 2\sqrt{9a}$
- b) $\sqrt{64ab^3} - 3\sqrt{12a^3b^3} + 2ab\sqrt{9ab} - 5b\sqrt{81a^3b}$

$$c) 2\sqrt{3a} - \sqrt{75a} + a\sqrt{\frac{13,5}{2a}} - \frac{2}{5}\sqrt{300a^3}$$

1.59 Thực hiện các phép tính sau:

$$1. a) \frac{13\sqrt{2} - 4\sqrt{6}}{24 - 4\sqrt{3}} \quad b) \frac{\sqrt{3 - 2\sqrt{2}}}{\sqrt{17 - 12\sqrt{2}}} \quad c) \frac{9\sqrt{6} - 12\sqrt{3}}{3\sqrt{6} - 3\sqrt{3}}$$

$$d) \frac{\sqrt{45} - \sqrt{2}}{\sqrt{5} - \sqrt{2}} \quad e) \frac{\sqrt{\sqrt{5} + \sqrt{2}}}{\sqrt{3\sqrt{5} - 3\sqrt{2}}} \quad f) \frac{3 + 4\sqrt{3}}{\sqrt{6} + \sqrt{2} - \sqrt{5}}$$

$$2. a) A = \frac{\sqrt{2 - \sqrt{3}}}{\sqrt{2}} \quad b) B = \frac{\sqrt{6 + \sqrt{35}}}{\sqrt{2}} \quad c) C = \frac{\sqrt{8 - \sqrt{15}}}{\sqrt{30} - \sqrt{2}}$$

$$3. a) \frac{\sqrt{15} - \sqrt{5}}{\sqrt{3} - 1} - \frac{5 - 2\sqrt{5}}{2\sqrt{5} - 4} \quad b) \frac{\sqrt{3} + 1}{\sqrt{3} - 1} + \frac{\sqrt{3} - 1}{\sqrt{3} + 1}$$

$$c) \frac{2\sqrt{8} - \sqrt{12}}{\sqrt{18} - \sqrt{48}} - \frac{\sqrt{5} + \sqrt{27}}{\sqrt{30} - \sqrt{2}} \quad d) \frac{3 - \sqrt{3}}{2\sqrt{3} - 1} + \frac{3 + \sqrt{3}}{2\sqrt{3} - 1}$$

$$e) \frac{2}{\sqrt{3} - 1} - \frac{2}{\sqrt{3} + 1} \quad f) \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{\sqrt{3} + 1} - 1} - \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{\sqrt{3} + 1} + 1}$$

$$g) \frac{2\sqrt{3} - 4}{\sqrt{3} - 1} + \frac{2\sqrt{2} - 1}{\sqrt{2} - 1} - \frac{1 + \sqrt{6}}{\sqrt{2} + \sqrt{3}} \quad h) \frac{5}{12(2\sqrt{5} + 3\sqrt{2})} - \frac{5}{12(2\sqrt{5} - 3\sqrt{2})}$$

$$4. a) \frac{1}{\sqrt{11 - 4\sqrt{7}}} - \frac{6}{\sqrt{32 - 10\sqrt{7}}}$$

$$b) \frac{1}{\sqrt{12 - \sqrt{140}}} - \frac{1}{\sqrt{8 - \sqrt{60}}} - \frac{1}{\sqrt{10 + \sqrt{84}}}$$

$$c) \frac{1}{\sqrt{3} - \sqrt{2}} - \frac{2}{\sqrt{7} + \sqrt{5}} - \frac{3}{\sqrt{7 - 2\sqrt{10}}} + \frac{4}{\sqrt{10 + 2\sqrt{21}}}$$

1.60 Chứng minh các số sau đây là số nguyên:

$$\text{a) } A = \frac{3\sqrt{3} + 2\sqrt{2}}{\sqrt{3} + \sqrt{2}} + \frac{\sqrt{6} + 6}{\sqrt{6} + 1}$$

$$\text{b) } B = \left(\frac{15}{\sqrt{6} + 1} + \frac{4}{\sqrt{6} - 2} - \frac{12}{3 - \sqrt{6}} \right) (\sqrt{6} + 11)$$

$$\text{c) } C = \frac{2\sqrt{3 + 2\sqrt{3} - \sqrt{2}} + \sqrt{3 + 2\sqrt{2}}}{\sqrt{3} - 1} - 2\sqrt{3}$$

1.61 Chứng minh các số sau đây là số dương:

$$\begin{aligned} \text{a) } A &= \frac{2 + \sqrt{3}}{\sqrt{2} + \sqrt{2 + \sqrt{3}}} + \frac{2 - \sqrt{3}}{\sqrt{2} - \sqrt{2 - \sqrt{3}}} & C &= \frac{\sqrt{1 + \frac{2\sqrt{2}}{3}} + \sqrt{1 - \frac{2\sqrt{2}}{3}}}{\sqrt{1 + \frac{2\sqrt{2}}{3}} - \sqrt{1 - \frac{2\sqrt{2}}{3}}} \\ \text{b) } B &= \frac{23\sqrt{2}}{\sqrt{2} + \sqrt{14 + 5\sqrt{3}}} + \frac{3\sqrt{2}}{\sqrt{2} - \sqrt{14 - 5\sqrt{3}}} \end{aligned}$$

1.62 Chứng tỏ rằng các số sau là số hữu tỉ:

$$\text{a) } \frac{2}{\sqrt{7} - 5} - \frac{2}{\sqrt{7} + 5} \qquad \text{b) } \frac{\sqrt{7} + \sqrt{5}}{\sqrt{7} - \sqrt{5}} + \frac{\sqrt{7} - \sqrt{5}}{\sqrt{7} + \sqrt{5}}$$

1.63 Các số sau đây có căn bậc hai không ?

$$\text{a) } A = \left(1 - \frac{\sqrt{3} - 1}{2} \right) : \left(\frac{\sqrt{3} - 1}{2} + 2 \right)$$

$$\text{b) } B = \left(\frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{1 - \sqrt{3}} - \frac{5}{\sqrt{5}} \right) : \frac{1}{\sqrt{5} - \sqrt{2}}$$

$$\text{c) } C = \frac{2}{\sqrt{3}} + \frac{\sqrt{2}}{3} + \frac{2}{\sqrt{3}} \sqrt{\frac{5}{12} - \frac{1}{\sqrt{6}}}$$

1.64 Tìm x biết:

$$\text{a) } \sqrt{25x} = 35 \qquad \text{b) } 3\sqrt{x} = \sqrt{12}$$

$$\text{c) } \sqrt{4x} \leq 162 \qquad \text{d) } 2\sqrt{x} \geq \sqrt{10}$$

1.65 Giải các phương trình sau:

$$1. \text{ a) } 2\sqrt{3x} - 4\sqrt{3x} = 27 - 3\sqrt{3x} \quad \text{b) } 3\sqrt{2x} - 5\sqrt{8x} + 7\sqrt{18x} = 28$$

$$2. \text{ a) } \sqrt{x^2 - 9} - 3\sqrt{x - 3} = 0 \quad \text{b) } \sqrt{x^2 - 4} - 2\sqrt{x + 2} = 0$$

1.66 Khử mẫu của các biểu thức dưới dấu căn (giả thiết rằng các biểu thức đã cho có nghĩa):

$$\text{a) } \sqrt{\frac{1}{600}}; \quad \sqrt{\frac{11}{540}}; \quad \sqrt{\frac{3}{50}}; \quad \sqrt{\frac{5}{98}}; \quad \sqrt{\frac{(1-\sqrt{3})^2}{27}}$$

$$\text{b) } ab\sqrt{\frac{a}{b}}; \quad \frac{a}{b}\sqrt{\frac{b}{a}}; \quad \sqrt{\frac{1}{b} + \frac{1}{b^2}}; \quad \sqrt{\frac{9a^3}{36b}}; \quad 3xy\sqrt{\frac{2}{xy}}$$

$$\text{c) } \sqrt{\frac{2}{3}}; \quad \sqrt{\frac{x^2}{5}}; \quad \sqrt{\frac{3}{x}}; \quad \sqrt{x^2 - \frac{x^2}{7}}; \quad 3xy\sqrt{\frac{2}{xy}}$$

1.67 Trục căn thức ở mẫu của các biểu thức sau (giả thiết rằng các biểu thức đã cho có nghĩa):

$$\text{a) } \frac{5}{\sqrt{10}}; \quad \frac{1}{3\sqrt{3}}; \quad \frac{5}{2\sqrt{5}}; \quad \frac{2\sqrt{2}+2}{5\sqrt{2}}; \quad \frac{y+b\sqrt{y}}{b\sqrt{y}}$$

$$\text{b) } \frac{3}{\sqrt{3}+1}; \quad \frac{2}{\sqrt{3}-1}; \quad \frac{2+\sqrt{3}}{2-\sqrt{3}}; \quad \frac{b}{3+\sqrt{b}}; \quad \frac{p}{2\sqrt{p}-1}$$

$$\text{c) } \frac{3}{\sqrt{3}+1}; \quad \frac{3}{\sqrt{10}+\sqrt{7}}; \quad \frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}; \quad \frac{2ab}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}$$

$$\text{d) } \frac{\sqrt{5}-\sqrt{3}}{\sqrt{2}}; \quad \frac{26}{5-2\sqrt{3}}; \quad \frac{2\sqrt{10}-5}{4-\sqrt{10}}; \quad \frac{9-2\sqrt{3}}{3\sqrt{6}-2\sqrt{2}}$$

$$\text{e) } \frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}+1}; \quad \frac{1}{\sqrt{5}-\sqrt{3}+2}$$

1.68 Phân tích thành nhân tử:

$$\text{a) } ab + b\sqrt{a} + \sqrt{a} + 1$$

$$\text{b) } \sqrt{x^3} - \sqrt{y^3} + \sqrt{x^2y} - \sqrt{xy^2}$$

1.69 Giải phương trình:

a) $\sqrt{2x+3}=1+\sqrt{2}$ b) $\sqrt{x+1}=\sqrt{5}+3$ c) $\sqrt{3x-2}=2-\sqrt{3}$

1.70 Giải các bất phương trình sau và biểu diễn nghiệm trên trục số:

a) $\sqrt{x-2} \geq \sqrt{3}$ b) $\sqrt{x-2} \geq \sqrt{3}$

1.71 Với n là số tự nhiên, chứng minh: $\sqrt{n+1}-\sqrt{n}=\frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}$

Áp dụng tính: $\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{1}}+\frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{4}+\sqrt{3}}$

1.72 Cho các biểu thức :

$$A = \frac{1}{\sqrt{1}+\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{4}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{24}+\sqrt{25}} ; B = \frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{24}}$$

a) Tính giá trị của A. b) Chứng minh rằng $B > 8$.

1.73 Rút gọn các biểu thức sau:

a) $A = \frac{1}{\sqrt{1}+\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{4}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n-1}+\sqrt{n}}$

b) $B = \frac{1}{\sqrt{1}-\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}-\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{3}-\sqrt{4}} - \dots - \frac{1}{\sqrt{24}-\sqrt{25}}$

F - Rút gọn biểu thức có chứa căn thức bậc hai

Cho $x \geq 0, y \geq 0$. Ta có các công thức biến đổi sau:

1. $x = (\sqrt{x})^2 ; x\sqrt{x} = (\sqrt{x})^3$

2. $x \pm \sqrt{x} = \sqrt{x}(\sqrt{x} \pm 1)$

3. $x\sqrt{y} \pm y\sqrt{x} = \sqrt{xy}(\sqrt{x} \pm \sqrt{y})$

4. $x - y = (\sqrt{x} + \sqrt{y})(\sqrt{x} - \sqrt{y})$

5. $x \pm 2\sqrt{xy} + y = (\sqrt{x} \pm \sqrt{y})^2$

$$6. x\sqrt{x} \pm y\sqrt{y} = (\sqrt{x})^3 \pm (\sqrt{y})^3 = (\sqrt{x} \pm \sqrt{y})(x \mp \sqrt{xy} + y)$$

1.74 Chứng minh các đẳng thức sau:

a) $\frac{\sqrt{x^3} - 1}{\sqrt{x} - 1} = x + \sqrt{x} + 1$ với $x > 0, x \neq 1$

b) $\frac{(x\sqrt{y} + y\sqrt{x})(\sqrt{x} - \sqrt{y})}{\sqrt{xy}} = x - y$ với $x, y > 0$

1.75 Rút gọn:

a) $A = \frac{x + 2\sqrt{3x} + 3}{x\sqrt{x} + 3\sqrt{3}}$ với $x \geq 0$

b) $B = \frac{x\sqrt{x} - y\sqrt{y}}{\sqrt{x} - \sqrt{y}}$ với $x \geq 0, y \geq 0$ và $x \neq y$

c) $C = \frac{a + b + 2\sqrt{ab}}{\sqrt{a} + \sqrt{b}} - \frac{a - b}{\sqrt{a} - \sqrt{b}}$ (với $a \geq 0, b \geq 0, a \neq b$)

d) $D = \frac{(\sqrt{a} + 1)(a - \sqrt{ab})(\sqrt{a} + \sqrt{b})}{(a - b)(a\sqrt{a} + a)}$ (với $a > 0, b \geq 0, a \neq b$)

e) $E = \frac{\sqrt{a} - 1}{a\sqrt{a} - a + \sqrt{a}} : \frac{1}{a^2 + \sqrt{a}}$ (với $a > 0$)

f) $F = \left(\frac{\sqrt{x} - \sqrt{y}}{x - y} + \frac{\sqrt{xy}}{\sqrt{x} + \sqrt{y}} \right) : \frac{\sqrt{xy} + 1}{\sqrt{x} + \sqrt{y}}$ (với $x \geq 0, y \geq 0, x \neq y$)

g) $G = \frac{x}{\sqrt{xy} + y} + \frac{y}{\sqrt{xy} - x} - \frac{x + y}{\sqrt{xy}}$ (với $xy \geq 0, x \neq y$)

h) $H = \frac{a - b}{\sqrt{a} - \sqrt{b}} - \frac{\sqrt{a^3} - \sqrt{b^3}}{a - b}$ (với $a \geq 0, b \geq 0, a \neq b$)

i) $I = \frac{(\sqrt{x} - \sqrt{y})^2 + 4\sqrt{xy}}{\sqrt{x} + \sqrt{y}} - \frac{x - y}{\sqrt{x} - \sqrt{y}}$ (với $x \geq 0, y \geq 0, x \neq y$)

j) $J = \left(\frac{\sqrt{x} + 1}{\sqrt{x} - 1} - \frac{\sqrt{x} - 1}{\sqrt{x} + 1} \right) : \left(1 - \frac{\sqrt{x} - 1}{\sqrt{x} + 1} \right)$ (với $x > 0, x \neq 1$)

k) $K = \left(\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x} - 1} - \frac{1}{x - \sqrt{x}} \right) : \left(\frac{1}{1 + \sqrt{x}} + \frac{2}{x - 1} \right)$ (với $x > 0, x \neq 1$)

$$l) L = \left(\frac{\sqrt{a}-2}{a-1} - \frac{\sqrt{a}+2}{a+2\sqrt{a}+1} \right) \left(1 + \frac{1}{\sqrt{a}} \right) \quad (\text{với } a > 0, a \neq 1)$$

$$M = \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-2} + \frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{x}+2} + \frac{2+5\sqrt{x}}{4-x} \quad (\text{với } x \geq 0, x \neq 4)$$

$$m) N = \left(\frac{x\sqrt{x}+y\sqrt{y}}{\sqrt{x}+\sqrt{y}} - \sqrt{xy} \right) \left(\frac{\sqrt{x}+\sqrt{y}}{x-y} \right)^2$$

(với $x \geq 0, y \geq 0, x \neq y$)

$$n) O = \left(\frac{a\sqrt{b}+b\sqrt{a}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}} + \frac{a\sqrt{a}-b\sqrt{b}}{\sqrt{a}-\sqrt{b}} \right) : \left(\frac{a-b}{\sqrt{a}-\sqrt{b}} \right)^2 \quad (\text{với } a \geq 0, b \geq 0, a \neq b)$$

$$o) P = \left(\frac{2x+1}{x\sqrt{x}-1} - \frac{\sqrt{x}}{x+\sqrt{x}+1} \right) \left(\frac{x\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}+1} - \sqrt{x} \right) \quad (\text{với } x \geq 0, x \neq 1)$$

$$p) Q = \left(\frac{\sqrt{x}+\sqrt{y}}{1-\sqrt{xy}} + \frac{\sqrt{x}-\sqrt{y}}{1+\sqrt{xy}} \right) : \frac{x+xy}{1-xy} \quad (\text{với } x > 0, y > 0, xy \neq 1)$$

$$q) R = \left(\frac{x\sqrt{x}+y\sqrt{y}}{\sqrt{x}+\sqrt{y}} = \frac{x\sqrt{y}-y\sqrt{x}}{\sqrt{x}-\sqrt{y}} \right) : (\sqrt{x}-\sqrt{y})^2 \quad (\text{với } x \geq 0, y \geq 0, x \neq y)$$

$$r) S = \left(\frac{\sqrt{x}+1}{x-4} - \frac{\sqrt{x}-1}{x+4\sqrt{x}+4} \right) \cdot \frac{x\sqrt{x}+2x-4\sqrt{x}-8}{\sqrt{x}} \quad (\text{với } x > 0, x \neq 4)$$

$$s) T = \frac{x\sqrt{x}-2x+28}{x-3\sqrt{x}-4} - \frac{\sqrt{x}-4}{\sqrt{x}+1} + \frac{\sqrt{x}+8}{4-\sqrt{x}} \quad (\text{với } x \geq 0, x \neq 16)$$

1.76 Cho $\sqrt{16-2x+x^2} - \sqrt{9-2x+x^2} = 1$.

$$\text{Tính } A = \sqrt{16-2x+x^2} + \sqrt{9-2x+x^2}$$

1.77 Rút gọn các biểu thức sau:

$$a) \sqrt{\frac{a}{b}} + \sqrt{ab} + \frac{a}{b} \cdot \sqrt{\frac{b}{a}} \quad \text{với } a > 0 \text{ và } b > 0$$

$$b) \sqrt{\frac{m}{1-2x+x^2}} + \sqrt{\frac{4m+8mx+4mx^2}{81}} \quad \text{với } m > 0 \text{ và } x > 1$$

1.78 Rút gọn rồi so sánh giá trị của biểu thức sau với 1:

$$M = \left(\frac{1}{a-\sqrt{a}} + \frac{1}{\sqrt{a}-1} \right) : \frac{\sqrt{a}+1}{a-2\sqrt{a}+1} \quad \text{với } a > 0 \text{ và } a \neq 1$$

1.79 Giải các phương trình sau:

1. a) $\sqrt{4x+20} - 3\sqrt{5+x} + \frac{4}{3}\sqrt{9x+45} = 6$

b) $\sqrt{25x-25} - \frac{15}{2}\sqrt{\frac{x-1}{9}} = 6 + \sqrt{x-1}$

c) $\sqrt{4x-20} - \frac{1}{3}\sqrt{9x-45} + \sqrt{x-5} = 4$

d) $\sqrt{16x+16} - \sqrt{9x+9} + \sqrt{4x+4} = 16 - \sqrt{x+1}$.

2. a) $\sqrt{1-x^2} = x-1$

b) $\sqrt{x^2+4x+4} = x-2$

c) $\sqrt{2x^2+7} = 2-x$

d) $\sqrt{x^2+4x+3} = x-2$

e) $\sqrt{x^2-4} + 2 - x = 0$

f) $\sqrt{x^2-4x+4} = 2x-1$

g) $\sqrt{(2x+4)(x-1)} = x+1$

h) $\sqrt{2x^2+4x-1} = x-2$.

3. a) $\sqrt{2x+9} = \sqrt{5-4x}$

b) $\sqrt{2x-1} = \sqrt{x-1}$

c) $\sqrt{x+3} = \sqrt{x+3}$

d) $\sqrt{x^2-x} = \sqrt{3-x}$

e) $\sqrt{x^2+3x+1} = \sqrt{x+1}$

f) $\sqrt{2x^2-3} = \sqrt{4x-3}$

g) $\sqrt{x^2-x-6} = \sqrt{x-3}$

h) $\sqrt{9x^2-4x} = \sqrt{2x-3}$.

4. a) $\sqrt{x+4\sqrt{x-4}} = 5$

b) $\sqrt{x+2\sqrt{x-1}} + \sqrt{x-2\sqrt{x-1}} = 2$

c) $\sqrt{x+2-4\sqrt{x-2}} + \sqrt{x+7-6\sqrt{x-2}} = 1$

d) $\sqrt{x+2-3\sqrt{2x-5}} + \sqrt{x+2+3\sqrt{2x-5}} = 2\sqrt{2}$.

5. a) $\sqrt{x^2-3x+5} + x^2 - 3x = 7$

b) $5\sqrt{x^2+5x+28} = x^2 + 5x + 4$

c) $2\sqrt{2x^2-3x+5} = 2x^2 - 3x - 6$

d) $\sqrt{2x^2+3x+9} + 2x^2 + 3x = 33$

1.80 Chứng minh đẳng thức sau:

2. a) $\left(x \cdot \sqrt{\frac{6}{x}} + \sqrt{\frac{2x}{3} + \sqrt{6x}}\right) : \sqrt{6x} = 2\frac{1}{3}$ với $x > 0$

b) $\left(\frac{1-a\sqrt{a}}{1-\sqrt{a}} + \sqrt{a}\right) \cdot \left(\frac{1-\sqrt{a}}{1-a}\right)^2 = 1$ với $a > 0$ và $a \neq 1$

c) $\frac{a+b}{b^2} \cdot \sqrt{\frac{a^2b^4}{a^2+2ab+b^2}} = |a|$ với $a+b > 0$ và $b \neq 0$

1.81 Cho biểu thức: $P = \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-2} + \frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{x}+2} + \frac{2+5\sqrt{x}}{4-x}$

- a) Rút gọn P nếu $x \geq 0$ và $x \neq 4$.
 b) Tìm x để $P = 2$.

1.82 Cho biểu thức: $Q = \left(\frac{1}{\sqrt{a}-1} - \frac{1}{\sqrt{a}}\right) : \left(\frac{\sqrt{a}+1}{\sqrt{a}-2} - \frac{\sqrt{a}+2}{\sqrt{a}-1}\right)$

- a) Chứng tỏ rằng Q xác định với $a > 0$, $a \neq 4$ và $a \neq 1$.
 b) Tìm giá trị của a để Q dương.

1.83 Cho biểu thức: $Q = \frac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}-3} - \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-2} - 3\frac{\sqrt{x}-1}{x-5\sqrt{x}+6}$

- a) Tìm điều kiện xác định và rút gọn Q.
 b) Tìm các giá trị của x để $Q < -1$.
 c) Tìm các giá trị của $x \in \mathbb{Z}$ sao cho $2Q \in \mathbb{Z}$.

1.84 Với 3 số a, b, c không âm. Chứng minh:

$$a + b + c \geq \sqrt{ab} + \sqrt{bc} + \sqrt{ca}$$

Hãy mở rộng kết quả trên cho trường hợp 4 số, 5 số không âm.

G - Căn bậc ba

1. Định nghĩa:

Căn bậc ba của một số a là số x sao cho $x^3 = a$

2. Tính chất:

a) $a < b \Leftrightarrow \sqrt[3]{a} < \sqrt[3]{b}$

$$b) \sqrt[3]{ab} = \sqrt[3]{a} \cdot \sqrt[3]{b}$$

$$c) \text{ Với } b \neq 0, \text{ ta có } \sqrt[3]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[3]{a}}{\sqrt[3]{b}}$$

1.85 Tính:

$$a) \sqrt[3]{512}; \quad \sqrt[3]{-729}; \quad \sqrt[3]{0,064}; \quad \sqrt[3]{0,216}; \quad \sqrt[3]{-0,008}.$$

$$b) \sqrt[3]{-343}; \quad \sqrt[3]{0,027}; \quad \sqrt[3]{1,331}; \quad \sqrt[3]{-0,512}; \quad \sqrt[3]{125}.$$

1.86 So sánh:

$$a) 5 \text{ và } \sqrt[3]{123}$$

$$b) 5\sqrt[3]{6} \text{ và } 6\sqrt[3]{5}$$

$$c) 2\sqrt[3]{3} \text{ và } \sqrt[3]{23}$$

$$d) 33 \text{ và } 3\sqrt[3]{1333}$$

1.87 Giải các phương trình sau:

$$a) \sqrt[3]{x} = -1,5$$

$$b) \sqrt[3]{x-5} = 0,9$$

1.88 Giải các bất phương trình sau và biểu diễn nghiệm trên trục số:

$$a) \sqrt[3]{x} \geq 2$$

$$b) \sqrt[3]{x} \leq -1,5$$

1.89 Chứng minh rằng với a, b bất kỳ thì:

$$a) \sqrt[3]{a^3} = a$$

$$b) (\sqrt[3]{a})^3 = a$$

$$c) \sqrt[3]{a^3 b} = a\sqrt[3]{b}$$

H - Ôn tập chương 1

1.90 Tính giá trị của các biểu thức sau bằng cách biến đổi, rút gọn thích hợp:

$$a) \sqrt{\frac{25}{81} \cdot \frac{16}{49} \cdot \frac{196}{9}}$$

$$b) \sqrt{3 \cdot \frac{1}{16} \cdot 2 \cdot \frac{14}{25} \cdot 2 \cdot \frac{34}{81}}$$

$$c) \frac{\sqrt{640} \cdot \sqrt{34,3}}{\sqrt{567}}$$

$$d) \sqrt{21,6} \cdot \sqrt{810} \cdot \sqrt{11^2 - 5^2}$$

1.91 Rút gọn các biểu thức sau:

$$a) (\sqrt{8} - 3\sqrt{2} + \sqrt{10})(\sqrt{2} - 3\sqrt{0,4})$$

$$b) 0,2\sqrt{(-10)^2 \cdot 3} + 2\sqrt{(\sqrt{3} - \sqrt{5})^2}$$

$$c) \left(\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}} - \frac{3}{2}\sqrt{\frac{1}{3}} + \frac{4}{5}\sqrt{\frac{4}{5}} \right) : \frac{8}{15}\sqrt{\frac{1}{8}}$$

$$d) 2\sqrt{(\sqrt{2}-3)^2} + \sqrt{2(-3)^2} - 5\sqrt{(-1)^4}$$

$$e) \sqrt{(2-\sqrt{3})^2} + 2\sqrt{4-2\sqrt{3}}$$

$$f) \sqrt{15-6\sqrt{6}} + \sqrt{33-12\sqrt{6}}$$

$$g) (5\sqrt{200} - 3\sqrt{450} + 2\sqrt{50}) : \sqrt{10}$$

$$h) \sqrt{6-2\sqrt{\sqrt{2}+\sqrt{12}+\sqrt{18-\sqrt{128}}}}$$

$$i) \frac{2\sqrt{3-\sqrt{3+\sqrt{13+\sqrt{48}}}}}{\sqrt{6}-\sqrt{2}}$$

$$j) \left(\frac{1}{\sqrt{7-2\sqrt{10}}} - \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{10}+2} + 1 \right) : (\sqrt{2}+1)^2$$

$$k) \sqrt{5}(\sqrt{6}+1) : \frac{\sqrt{2\sqrt{3}+\sqrt{2}}}{\sqrt{2\sqrt{3}-\sqrt{2}}}$$

$$l) \sqrt{\frac{2\sqrt{10}+\sqrt{30}-2\sqrt{2}-\sqrt{6}}{2\sqrt{10}-2\sqrt{2}}} : \frac{2}{\sqrt{3}-1}$$

$$m) \frac{(5+2\sqrt{6})(49-20\sqrt{6})-\sqrt{5-2\sqrt{6}}}{9\sqrt{3}-11\sqrt{2}}$$

$$n) \sqrt{8+2\sqrt{10+2\sqrt{5}}} + \sqrt{8-2\sqrt{10+2\sqrt{5}}}$$

$$o) (4+\sqrt{15})(\sqrt{10}-\sqrt{6})\sqrt{4-\sqrt{15}}$$

$$p) (\sqrt{5}+3)(\sqrt{10}-\sqrt{2})\sqrt{3-\sqrt{5}}$$

1.92 Phân tích thành nhân tử (với x, y, a, b dương và a > b)

$$a) 3 + \sqrt{x} + 9 - x$$

$$b) xy + y\sqrt{x} + \sqrt{x} + 1$$

$$c) \sqrt{xa} - \sqrt{by} + \sqrt{bx} - \sqrt{ay}$$

$$d) \sqrt{a+b} + \sqrt{a^2-b^2}$$

1.93 Rút gọn rồi tính giá trị của các biểu thức sau:

$$a) \sqrt{-9a} - \sqrt{9+12a+4a^2} \text{ với } a = -9$$

$$b) 1 + \frac{3m}{m-2} \sqrt{m^2-4m-4} \text{ với } m < 0$$

c) $\sqrt{1-10a+25a^2} - 4a$ với $a = \sqrt{2}$

d) $4x - \sqrt{9x^2 + 6x + 1}$ với $x = -\sqrt{3}$

1.94 Rút gọn các biểu thức sau:

a) $A = \left(\frac{\sqrt{x}}{x-4} + \frac{2}{2-\sqrt{x}} + \frac{1}{\sqrt{x}+2} \right) : \left(\sqrt{x} - 2 + \frac{10-x}{\sqrt{x}+2} \right)$

b) $B = \left(\frac{x\sqrt{x} + y\sqrt{y}}{\sqrt{x} + \sqrt{y}} - \sqrt{xy} \right) : (x-y) + \frac{2\sqrt{y}}{\sqrt{x} + \sqrt{y}}$

c) $C = \left(1 - \frac{\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}} \right) : \left(\frac{\sqrt{x}+3}{\sqrt{x}-2} + \frac{2+\sqrt{x}}{3-\sqrt{x}} + \frac{\sqrt{x}+2}{x-5\sqrt{x}+6} \right)$

d) $D = \sqrt{\frac{a+x^2}{x} - 2\sqrt{a}} - \sqrt{\frac{a+x^2}{x} + 2\sqrt{a}}$ với $a > 0, x > 0$.

1.95 Giải các phương trình sau:

a) $\frac{5}{3}\sqrt{15x} - \sqrt{15x} + 11 = \frac{1}{3}\sqrt{15x}$ b) $\frac{3\sqrt{x}+1}{7\sqrt{x}-5} = \frac{8}{15}$

c) $\sqrt{(2x-1)^2} = 3$

d) $\sqrt{2-x} + \sqrt{8-4x} = 3$

1.96 Chứng minh các đẳng thức sau:

1. a) $\left(\frac{2\sqrt{3}-\sqrt{6}}{\sqrt{8}-2} - \frac{\sqrt{216}}{3} \right) \cdot \frac{1}{\sqrt{6}} = -1,5$

b) $\left(\frac{\sqrt{14}-\sqrt{7}}{1-\sqrt{2}} + \frac{\sqrt{15}-\sqrt{5}}{1-\sqrt{3}} \right) : \frac{1}{\sqrt{7}-\sqrt{5}} = -2$

c) $\sqrt{2+\sqrt{3}} + \sqrt{2-\sqrt{3}} = \sqrt{6}$

d) $\sqrt{\frac{4}{(2-\sqrt{5})^2}} - \sqrt{\frac{4}{(2+\sqrt{5})^2}} = 8$

e) $\left(\frac{3}{2} \cdot \sqrt{6} + 2 \cdot \sqrt{\frac{2}{3}} - 4 \cdot \sqrt{\frac{3}{2}} \right) \cdot \left(\frac{3}{2} \cdot \sqrt{6} + 2 \cdot \sqrt{\frac{2}{3}} + 4 \cdot \sqrt{\frac{3}{2}} \right) = -\sqrt{2}$

2. a) $\frac{a\sqrt{b} + b\sqrt{a}}{\sqrt{ab}} : \frac{1}{\sqrt{a}-\sqrt{b}} = a-b$ (với $a, b > 0$ và $a \neq b$)

b) $\left(1 + \frac{a+\sqrt{a}}{\sqrt{a}+1} \right) \cdot \left(1 - \frac{a-\sqrt{a}}{\sqrt{a}-1} \right) = 1-a$ (với $a > 0$ và $a \neq 1$)

$$c) \frac{\sqrt{a} + \sqrt{b}}{2\sqrt{a} - 2\sqrt{b}} - \frac{\sqrt{a} - \sqrt{b}}{2\sqrt{a} + 2\sqrt{b}} - \frac{2b}{b-a} = \frac{2\sqrt{b}}{\sqrt{a} - \sqrt{b}} \quad (\text{với } a, b > 0 \text{ và } a \neq b)$$

$$d) \left(1 + \frac{a + \sqrt{a}}{\sqrt{a} + 1}\right) \cdot \left(1 - \frac{a - \sqrt{a}}{\sqrt{a} - 1}\right) = 1 - a \quad (\text{với } a, b > 0 \text{ và } a \neq b)$$

1.97 Tìm x nguyên để $\frac{\sqrt{x} + 1}{\sqrt{x} + 3}$ nhận giá trị nguyên.

1.98 a) Chứng tỏ: $x - 4\sqrt{x-4} = (\sqrt{x-4} - 2)^2$

b) Tìm điều kiện xác định và rút gọn:

$$A = \sqrt{x + 4\sqrt{x-4}} + \sqrt{x - 4\sqrt{x-4}}$$

1.99 Cho các biểu thức: $A = \sqrt{x} + \sqrt{x+1}$ và $B = \sqrt{x+4} + \sqrt{x-1}$

a) Tìm điều kiện xác định của A và B.

b) Chứng tỏ $A \geq 1$ và $B \geq \sqrt{5}$

c) Tìm x để $A = 1, B = 2$.

1.100 Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức:

$$a) A = \frac{1}{x - \sqrt{x} + 1} \quad b) B = \sqrt{4x - x^2} + 21$$

$$c) C = 1 + \sqrt{-9x^2 + 6x} \quad d) D = \sqrt{x-2} + \sqrt{4-x}$$

1.101 Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$a) A = \sqrt{4x^2 + 4x + 2} \quad b) B = \sqrt{2x^2 - 4x + 5}$$

$$c) P = \frac{x-3}{\sqrt{x-1} - \sqrt{2}} \quad d) Q = x - 2\sqrt{x+2}$$

1.102 Cho biểu thức: $A = \frac{\sqrt{4x^2 - 4x + 1}}{4x - 2}$. Chứng tỏ $|A| = 0,5$ với $x \neq 0,5$.

1.103 Cho $Q = \frac{a}{\sqrt{a^2 - b^2}} - \left(1 + \frac{a}{\sqrt{a^2 - b^2}}\right) : \frac{b}{a - \sqrt{a^2 - b^2}}$ với $a > b > 0$

a) Rút gọn Q

b) Tìm giá trị của Q khi $a = 3b$.

1.104 Cho biểu thức: $A = \frac{(\sqrt{a} + \sqrt{b})^2 - 4\sqrt{ab}}{\sqrt{a} - \sqrt{b}} - \frac{a\sqrt{b} + b\sqrt{a}}{\sqrt{ab}}$

- Tìm điều kiện để A có nghĩa.
- Khi A có nghĩa, chứng tỏ giá trị A không phụ thuộc vào a.

1.105 Cho biểu thức:

$$Q = -\left(\frac{2x+1}{\sqrt{x^3}-1} - \frac{\sqrt{x}}{x+\sqrt{x}+1}\right)\left(\frac{1+\sqrt{x^3}}{1+\sqrt{x}} - \sqrt{x}\right) \text{ với } x \geq 0 \text{ và } x \neq 1$$

- Rút gọn Q.
- Tìm giá trị của x để Q = 3.

1.106 Cho biểu thức:

$$C = \left(\frac{\sqrt{x}}{3+\sqrt{x}} + \frac{x+9}{9-x}\right) : \left(\frac{3\sqrt{x}+1}{x-3\sqrt{x}} - \frac{1}{\sqrt{x}}\right) \text{ với } x \geq 0 \text{ và } x \neq 9.$$

- Rút gọn C
- Tìm giá trị của x để C < -1.

1.107 Cho biểu thức: $A = 6x^2 - 5x\sqrt{y} + y$.

- Phân tích biểu thức A thành nhân tử.
- Tính giá trị của A khi $x = -\frac{2}{3}$, $y = \frac{b}{4+\sqrt{7}}$.

1.108 Cho biểu thức: $B = \frac{x-3}{\sqrt{x-1}-\sqrt{2}}$.

- Tìm điều kiện xác định của B.
- Rút gọn B.
- Tính giá trị của B khi $x = 10 - \sqrt{56}$
- Tìm giá trị nhỏ nhất của B.

1.109 Cho biểu thức: $C = \frac{6-x-\sqrt{x}}{\sqrt{x}+3}$.

- Tìm điều kiện xác định của C.
- Rút gọn B.

c) Tìm giá trị lớn nhất của C.

1.110 Cho biểu thức: $P = \frac{1}{\sqrt{x-1}-\sqrt{x}} + \frac{1}{\sqrt{x-1}+\sqrt{x}} + \frac{\sqrt{x^3-x}}{\sqrt{x-1}}$.

a) Tìm điều kiện xác định của P.

b) Rút gọn P.

c) Tính giá trị của P khi $x = \frac{53}{9-2\sqrt{7}}$

d) Giải phương trình : $P = 16$.

1.111 Cho biểu thức: $Q = \left(1 + \frac{\sqrt{x}}{x+1}\right) : \left(\frac{1}{\sqrt{x-1}} - \frac{2\sqrt{x}}{x\sqrt{x} + \sqrt{x-x-1}}\right)$.

a) Tìm điều kiện xác định của Q.

b) Rút gọn Q.

c) Tính giá trị của Q khi $x = 4 + 2\sqrt{3}$

d) Giải bất phương trình : $Q > 1$.

1.112 Cho biểu thức: $A = \frac{a^2 + \sqrt{a}}{a - \sqrt{a} + 1} - \frac{2a + \sqrt{a}}{\sqrt{a}} + 1$.

a) Rút gọn A.

b) Biết $a > 0$, hãy so sánh A với $|A|$

c) Tìm a để $A = 2$

d) Tìm giá trị nhỏ nhất của A.

1.113 Cho biểu thức: $B = \left(\frac{3}{\sqrt{1+a}} + \sqrt{1-a}\right) : \left(\frac{3}{\sqrt{1-a^2}} + 1\right)$.

a) Tìm điều kiện xác định của B.

b) Rút gọn B.

c) Tính giá trị của B khi $a = \frac{\sqrt{3}}{2 + \sqrt{3}}$

d) Tìm giá trị của a để : $\sqrt{B} > B$.

1.114 Cho biểu thức: $M = \frac{a}{\sqrt{a^2-b^2}} - \left(\frac{a}{\sqrt{a^2-b^2}} + 1\right) : \frac{b}{a - \sqrt{a^2-b^2}}$.

- a) Rút gọn M.
 b) Tìm giá trị của M nếu $\frac{a}{b} = \frac{3}{2}$
 c) Tìm điều kiện của a, b để $M < 1$.

1.115 Cho biểu thức: $P = \left(\frac{\sqrt{x}-2}{x-1} - \frac{\sqrt{x}+2}{x+2\sqrt{x}+1} \right) \cdot \frac{(1-x)^2}{2}$.

- a) Tìm điều kiện xác định của P.
 b) Rút gọn P.
 c) Tính giá trị lớn nhất của P.
 d) Chứng minh: nếu $0 < x < 1$ thì $P > 0$.

1.116 Cho biểu thức: $Q = \frac{2\sqrt{x}-9}{x-5\sqrt{x}+6} - \frac{\sqrt{x}+3}{\sqrt{x}-2} - \frac{2\sqrt{x}+1}{3-\sqrt{x}}$.

- a) Tìm điều kiện xác định của Q.
 b) Rút gọn Q.
 c) Tìm các giá trị của x để $Q < 1$
 d) Tìm $x \in \mathbb{Z}$ sao cho $Q \in \mathbb{Z}$.

1.117 Cho biểu thức:

$$Q = \left(\frac{x-y}{\sqrt{x}-\sqrt{y}} + \frac{\sqrt{x^3}-\sqrt{y^3}}{y-x} \right) : \frac{(\sqrt{x}-\sqrt{y})^2 + \sqrt{xy}}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}$$

- a) Tìm điều kiện xác định của Q. b) Rút gọn Q.
 c) So sánh Q với \sqrt{Q} d) Chứng minh $Q \geq 0$.

1.118 Cho biểu thức: $M = \frac{3x+\sqrt{9x}-3}{x+\sqrt{x}-2} - \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}+2} + \frac{\sqrt{x}-2}{1-\sqrt{x}}$.

- a) Tìm ĐKXD và rút gọn M b) Tìm $x \in \mathbb{Z}$ sao cho $M \in \mathbb{Z}$.

1.119 Cho biểu thức: $P = \frac{15\sqrt{x}-11}{x+2\sqrt{x}-3} + \frac{3\sqrt{x}-2}{1-\sqrt{x}} - \frac{2\sqrt{x}+3}{3+\sqrt{x}}$.

- a) Tìm điều kiện xác định của P b) Rút gọn P.
 c) Giải phương trình $P = \frac{1}{2}$ d) So sánh P với $\frac{2}{3}$.

1.120 Cho biểu thức:

$$Q = \left(\frac{x - 3\sqrt{x}}{x - 9} - 1 \right) : \left(\frac{9 - x}{x + \sqrt{x} - 6} + \frac{\sqrt{x} - 3}{\sqrt{x} - 2} - \frac{2\sqrt{x} + 3}{\sqrt{x} + 3} \right).$$

- a) Tìm ĐKXD và rút gọn Q b) Tìm x để $Q < 1$.

1.121 Cho biểu thức: $M = \frac{1}{\sqrt{x} + 1} - \frac{3}{x\sqrt{x} + 1} + \frac{2}{x - \sqrt{x} + 1}$.

- a) Rút gọn M. b) Chứng minh: $M \leq 1$.

1.122 Cho biểu thức: $N = \frac{x^2 - \sqrt{x}}{x + \sqrt{x} + 1} - \frac{x^2 + \sqrt{x}}{x - \sqrt{x} + 1}$.

Hãy rút gọn $A = 1 - \sqrt{N + x + 1}$.

HƯỚNG DẪN GIẢI:

CHƯƠNG I: CĂN BẬC HAI – CĂN BẬC BA

A. CĂN BẬC HAI

1.1 Điền vào ô trống trong bảng sau:

x	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
x ²										

Hướng dẫn giải:

x	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
x ²	12	14	16	25	22	25	28	32	36	40
	1	4	9	6	5	6	9	4	1	0

1.2 Tìm căn bậc hai số học rồi suy ra căn bậc hai của các số sau:

- a) 121 b) 144 c) 169 d) 225
 e) 256 f) 324 g) 361 h) 400
 i) 0,01 j) 0,04 k) 0,49 l) 0,64

m) 0,25 n) 0,81 o) 0,09 p) 0,16

Hướng dẫn giải:

Số	121	144	169	225	256	324	361	400	0,01
CBH	11; - 11	12 ;- 12	13 ;- 13	15; - 15	14; - 14	18; - 18	19; - 19	20; - 20	0,1;- 0,1
CBHS H	11	12	13	15	14	18	19	20	0,1

Số	0,04	0,49	0,64	0,25	0,81	0,09	0,16
CBH	0,2;- 0,2	0,7;- 0,7	0,8;- 0,8	0,5;- 0,5	0,9;- 0,9	0,3;- 0,3	0,4;- 0,4
CBHS H	0,2	0,7	0,8	0,5	0,9	0,3	0,4

1.3 Tính:

a) $\sqrt{0,09}$ b) $\sqrt{-16}$ c) $\sqrt{0,25} \cdot \sqrt{0,16}$ d) $\sqrt{(-4) \cdot (-25)}$

e) $\sqrt{\frac{4}{25}}$ f) $\frac{6\sqrt{16}}{5\sqrt{0,04}}$ g) $\sqrt{0,36} - \sqrt{0,49}$

Hướng dẫn giải:

a) $\sqrt{0,09} = 0,3$ b) $\sqrt{-16}$ không có c) $\sqrt{0,25} \cdot \sqrt{0,16} = 0,5 \cdot 0,4 = 0,2$ d)

$\sqrt{(-4) \cdot (-25)} = 10$

e) $\sqrt{\frac{4}{25}} = \frac{2}{5}$ f) $\frac{6\sqrt{16}}{5\sqrt{0,04}} = \frac{6 \cdot 4}{5 \cdot 0,2} = 24$ g) $\sqrt{0,36} - \sqrt{0,49} = 0,6 - 0,7 = -0,1$

1.4 Trong các số sau, số nào có căn bậc hai:

a) $\sqrt{5}$ b) 1,5 c) -0,1 d) $-\sqrt{9}$

Hướng dẫn giải:

a) $\sqrt{5}$ b) 1,5: Vì các số đó là các số không âm.

1.5 Trong các biểu thức sau, biểu thức nào có căn bậc hai:

- a) $(x - 4)(x - 6) + 1$ b) $(3 - x)(x - 5) - 4$
 c) $-x^2 + 6x - 9$ d) $-5x^2 + 8x - 4$
 e) $x(x - 1)(x + 1)(x + 2) + 1$ f) $x^2 + 20x + 101$

Hướng dẫn giải:

Biểu thức a; e, f có căn bậc hai vì

- a) $(x - 4)(x - 6) + 1 = (x + 5)^2 \geq 0$ b) $(3 - x)(x - 5) - 4 = -(x^2 - 8x + 19) < 0$
 c) $-x^2 + 6x - 9 = -(x - 3)^2 \leq 0$ d) $-5x^2 + 8x - 4 = -5 \left[\left(x - \frac{4}{5}\right)^2 + \frac{84}{25} \right] < 0$
 e) $x(x - 1)(x + 1)(x + 2) + 1 = (x^2 + x - 1)^2 \geq 0$ f) $x^2 + 20x + 101 = (x + 10)^2 + 1 \geq 0$

1.6 So sánh hai số sau (không dùng máy tính):

- a) 1 và $\sqrt{2}$ b) 2 và $\sqrt{3}$ c) 6 và $\sqrt{41}$
 d) 7 và $\sqrt{47}$ e) 2 và $\sqrt{2} + 1$ f) 1 và $\sqrt{3} - 1$
 g) $2\sqrt{31}$ và 10 h) $\sqrt{3}$ và -12 i) -5 và $-\sqrt{29}$
 j) $2\sqrt{5}$ và $\sqrt{19}$ k) $\sqrt{\sqrt{3}}$ và $\sqrt{2}$ l) $\sqrt{2\sqrt{3}}$ và $\sqrt{3\sqrt{2}}$
 m) $2 + \sqrt{6}$ và 5 n) $7 - 2\sqrt{2}$ và 4 o) $\sqrt{15} + \sqrt{8}$ và 7
 p) $\sqrt{37} - \sqrt{14}$ và $6 - \sqrt{15}$ q) $\sqrt{17} + \sqrt{26} + 1$ và $\sqrt{99}$

Hướng dẫn giải:

- a) 1 và $\sqrt{2}$
 Vì $1 < 2$ nên $1 < \sqrt{2}$
 b) 2 và $\sqrt{3}$

Vì $2 = \sqrt{4}$ và $\sqrt{4} > \sqrt{3}$ nên $2 > \sqrt{3}$

c) 6 và $\sqrt{41}$

Vì $6 = \sqrt{36}$ và $\sqrt{36} < \sqrt{41}$ nên $6 < \sqrt{41}$

d) 7 và $\sqrt{47}$ Vì $7 = \sqrt{49}$ và $\sqrt{49} < \sqrt{47}$ nên $7 < \sqrt{47}$

e) 2 và $\sqrt{2} + 1$.

Vì $2 = 1 + 1$ và $1 < \sqrt{2}$ nên $1 + 1 < \sqrt{2} + 1$. Vậy $2 < \sqrt{2} + 1$

f) 1 và $\sqrt{3} - 1$

Vì $1 = 2 - 1 = \sqrt{4} - 1$ nên $\sqrt{4} - 1 > \sqrt{3} - 1$. Vậy $1 > \sqrt{3} - 1$

g) $2\sqrt{31}$ và 10

Vì $10 = 2 \cdot 5 = 2\sqrt{25}$ nên $2\sqrt{25} < 2\sqrt{31}$. Vậy $2\sqrt{31} > 10$

h) $\sqrt{3}$ và -12

Vì $\sqrt{3} > 0$ và $-12 < 0$ nên $\sqrt{3} > -12$

h) -5 và $-\sqrt{29}$

Vì $-5 = -\sqrt{25}$ nên $-\sqrt{25} > -\sqrt{29}$. Vậy $-5 > -\sqrt{29}$

i) $2\sqrt{5}$ và $\sqrt{19}$

Vì $2\sqrt{5} = \sqrt{20}$ nên $\sqrt{19} < \sqrt{20}$. Vậy $2\sqrt{5} > \sqrt{19}$

k) $\sqrt{\sqrt{3}}$ và $\sqrt{2}$. Vì $\sqrt{2} = \sqrt{\sqrt{4}}$ nên $\sqrt{\sqrt{4}} > \sqrt{\sqrt{3}}$. Vậy $\sqrt{\sqrt{3}} < \sqrt{2}$

l) $\sqrt{2\sqrt{3}}$ và $\sqrt{3\sqrt{2}}$. Vì $\sqrt{2\sqrt{3}} = \sqrt{\sqrt{12}}$ và $\sqrt{3\sqrt{2}} = \sqrt{\sqrt{18}}$ nên $\sqrt{\sqrt{12}} < \sqrt{\sqrt{18}}$.

Vậy $\sqrt{2\sqrt{3}} < \sqrt{3\sqrt{2}}$.

m) $2 + \sqrt{6}$ và 5. Vì $5 = 2 + 3 = 2 + \sqrt{9} > 2 + \sqrt{6}$ nên $2 + \sqrt{6} < 5$

n) $7 - 2\sqrt{2}$ và 4. Vì $4 = 7 - 3 = 7 - \sqrt{9}$ và $7 - 2\sqrt{2} = 7 - \sqrt{8}$ nên $7 - \sqrt{9} < 7 - \sqrt{8}$.

Vậy $7 - 2\sqrt{2} > 4$

o) $\sqrt{15} + \sqrt{8}$ và 7

Ta có: $7 = 4 + 3 = \sqrt{16} + \sqrt{9}$ nên $\sqrt{15} + \sqrt{8} < \sqrt{16} + \sqrt{9}$. Vậy $\sqrt{15} + \sqrt{8} < 7$

p) $\sqrt{37} - \sqrt{14}$ và $6 - \sqrt{15}$

Ta có: $6 - \sqrt{15} = \sqrt{36} - \sqrt{15} < \sqrt{37} - \sqrt{14}$. Vậy $\sqrt{37} - \sqrt{14} > 6 - \sqrt{15}$

q) $\sqrt{17} + \sqrt{26} + 1$ và $\sqrt{99}$

1.7 Dùng kí hiệu $\sqrt{\quad}$ viết nghiệm của các phương trình dưới đây, sau đó dùng máy tính để tính chính xác nghiệm với 3 chữ số thập phân.

a) $x^2 = 2$ b) $x^2 = 3$ c) $x^2 = 3,5$ d) $x^2 = 4,12$

e) $x^2 = 5$ f) $x^2 = 6$ g) $x^2 = 2,5$ h) $x^2 = \sqrt{5}$

Hướng dẫn giải:

a) $x^2 = 2$ nên $x = \pm \sqrt{2}$

b) $x^2 = 3$ nên $x = \pm \sqrt{3}$

c) $x^2 = 3,5$ nên $x = \pm \sqrt{3,5}$

d) $x^2 = 4,12$ nên $x = \pm \sqrt{4,12}$

e) $x^2 = 5$ nên $x = \pm \sqrt{5}$

f) $x^2 = 6$ nên $x = \pm \sqrt{6}$

g) $x^2 = 2,5$ nên $x = \pm \sqrt{2,5}$

h) $x^2 = \sqrt{5}$ nên $x = \pm \sqrt{\sqrt{5}}$

1.8 Giải các phương trình sau:

a) $x^2 = 25$ b) $x^2 = 30,25$ c) $x^2 = 5$

d) $x^2 - \sqrt{3} = \sqrt{2}$ e) $x^2 - 5 = 0$ f) $x^2 + \sqrt{5} = 2$

g) $x^2 = \sqrt{3}$ h) $2x^2 + 3\sqrt{2} = 2\sqrt{3}$ i) $(x - 1)^2 = 1\frac{9}{16}$

j) $x^2 = (1 - \sqrt{3})^2$ k) $x^2 = 27 - 10\sqrt{2}$ l) $x^2 + 2x = 3 - 2\sqrt{3}$

Hướng dẫn giải:

a) $x^2 = 25$

$\Rightarrow x = 5$ hoặc -5

b) $x^2 = 30,25$

$\Rightarrow x = 5,5$ hoặc $-5,5$

c) $x^2 = 5$

$\Rightarrow x = \sqrt{5}$ hoặc $-\sqrt{5}$

d) $x^2 - \sqrt{3} = \sqrt{2}$

$\Rightarrow x^2 = \sqrt{3} + \sqrt{2}$

$\Rightarrow x = \sqrt{\sqrt{3} + \sqrt{2}}$ hoặc $-\sqrt{\sqrt{3} + \sqrt{2}}$

e) $x^2 - 5 = 0$

$\Rightarrow x^2 = 5$

$\Rightarrow x = \sqrt{5}$ hoặc $-\sqrt{5}$

f) $x^2 + \sqrt{5} = 2$

$\Rightarrow x^2 = 2 - \sqrt{5} < 0$

$\Rightarrow x$ thuộc rỗng.

g) $x^2 = \sqrt{3}$

$\Rightarrow x = \sqrt{\sqrt{3}}$ hoặc $-\sqrt{\sqrt{3}}$

h) $2x^2 + 3\sqrt{2} = 2\sqrt{3}$

$\Rightarrow 2x^2 = 2\sqrt{3} - 3\sqrt{2} < 0$

$\Rightarrow x$ thuộc rỗng.

i) $(x - 1)^2 = 1 \frac{9}{16}$

$\Rightarrow (x - 1)^2 = \frac{25}{16}$

$\Rightarrow x = 2,25$ hoặc $x = -0,25$

j) $x^2 = (1 - \sqrt{3})^2$

$\Rightarrow x = 1 - \sqrt{3}$ hoặc $\sqrt{3} - 1$

k) $x^2 = 27 - 10\sqrt{2}$

$$\Rightarrow x = 5 - \sqrt{2} \text{ hoặc } \sqrt{2} - 5$$

$$1) x^2 + 2x = 3 - 2\sqrt{3}$$

$$\Rightarrow (x+1)^2 = (1 - \sqrt{3})^2$$

$$\Rightarrow x+1 = 1 - \sqrt{3} \text{ hoặc } x+1 = \sqrt{3} - 1$$

$$\Rightarrow x = -\sqrt{3} \text{ hoặc } x = \sqrt{3} - 2$$

1.9 Giải phương trình:

$$a) \sqrt{x} = 3 \quad b) \sqrt{x} = \sqrt{5} \quad c) \sqrt{x} = 0 \quad d) \sqrt{x} = -2$$

Hướng dẫn giải:

$$a) \sqrt{x} = 3 \text{ (ĐK: } x \geq 0 \text{)}$$

$$\Rightarrow x = 9 \text{ (TM)}$$

$$b) \sqrt{x} = \sqrt{5} \text{ (ĐK: } x \geq 0 \text{)}$$

$$\Rightarrow x = 5 \text{ (TM)}$$

$$c) \sqrt{x} = 0 \text{ (ĐK: } x \geq 0 \text{)}$$

$$\Rightarrow x = 0 \text{ (TM)}$$

$$d) \sqrt{x} = -2 \text{ (ĐK: } x \geq 0 \text{)}$$

$$\Rightarrow x \text{ thuộc rỗng.}$$

1.10 Trong các số: $\sqrt{(-7)^2}$, $\sqrt{(-7)}$, $-\sqrt{7^2}$, $-\sqrt{(-7)^2}$ thì số nào là căn bậc hai số học của 49 ?

Hướng dẫn giải:

$$\text{Căn bậc hai số học của } 49 = \sqrt{(-7)^2}$$

1.11 Cho hai số dương a và b. Chứng minh rằng:

$$a) \text{ Nếu } a > b \text{ thì } \sqrt{a} > \sqrt{b} \quad b) \text{ Nếu } \sqrt{a} > \sqrt{b} \text{ thì } a > b$$

Hướng dẫn giải:

$$a) \text{ Nếu } a > b \text{ thì } \sqrt{a} > \sqrt{b}.$$

Do a, b không âm và $a > b$ nên $a > 0$

$$\Leftrightarrow \sqrt{a} + \sqrt{b} > 0$$

$$\text{Ta có: } a - b = (\sqrt{a})^2 - (\sqrt{b})^2 = (\sqrt{a} + \sqrt{b})(\sqrt{a} - \sqrt{b})$$

$$\text{Vì } a > b \text{ nên } a - b > 0. \text{ Do đó: } \sqrt{a} - \sqrt{b} > 0 \quad \text{hay } \sqrt{a} > \sqrt{b}$$

b) Nếu $\sqrt{a} > \sqrt{b}$ thì $a > b$

Do a, b không âm và $a > b$ nên $a > 0$

$$\Leftrightarrow \sqrt{a} + \sqrt{b} > 0$$

$$\text{Ta có: } a - b = (\sqrt{a})^2 - (\sqrt{b})^2 = (\sqrt{a} + \sqrt{b})(\sqrt{a} - \sqrt{b})$$

$$\text{Vì } \sqrt{a} > \sqrt{b} \text{ nên } \sqrt{a} - \sqrt{b} > 0. \text{ Do đó: } a - b > 0 \text{ nên } a > b.$$

1.12 Cho số dương a. Chứng minh rằng:

a) Nếu $a > 1$ thì $\sqrt{a} > \sqrt{b}$ b) Nếu $a < 1$ thì $\sqrt{a} > \sqrt{b}$

Hướng dẫn giải:

a) Nếu $a > 1$ thì $\sqrt{a} > 1$

$$\text{Ta có: } 1 = \sqrt{1}. \text{ Theo KQ bài 1.11 ta có: } a > b \text{ thì } \sqrt{a} > \sqrt{b}.$$

$$\Leftrightarrow a > 1 \text{ thì } \sqrt{a} > 1$$

b) Nếu $a < 1$ thì $\sqrt{a} < 1$.

Do a, b không âm và $a < b$ nên $b > 0$

$$\Leftrightarrow \sqrt{a} + \sqrt{b} > 0$$

$$\text{Ta có: } a - b = (\sqrt{a})^2 - (\sqrt{b})^2 = (\sqrt{a} + \sqrt{b})(\sqrt{a} - \sqrt{b})$$

$$\text{Vì } a < b \text{ nên } a - b < 0. \text{ Do đó: } \sqrt{a} - \sqrt{b} < 0 \quad \text{hay } \sqrt{a} < \sqrt{b}$$

$$\text{Vậy nếu } a < b \text{ thì } \sqrt{a} < \sqrt{b}$$

$$\text{Thay } b = 1 \text{ ta có: } a < 1 \text{ thì } \sqrt{a} < 1.$$

1.13 Cho số dương a. Chứng minh rằng:

a) Nếu $a > 1$ thì $a > \sqrt{a}$ b) Nếu $a < 1$ thì $a < \sqrt{a}$

Hướng dẫn giải:

a) Nếu $a > 1$ thì $a > \sqrt{a}$.

- Theo kq bài 12a có: $a > 1$ thì $\sqrt{a} > 1$ (1).

- Nhân \sqrt{a} và hai vế (1) ta có $a > \sqrt{a}$

Vậy $a > 1$ thì $a > \sqrt{a}$.

b) Nếu $a < 1$ thì $a < \sqrt{a}$.

- Theo qk bài 12b có: $a < 1$ thì $\sqrt{a} < 1$ (1).

Nhân \sqrt{a} và hai vế (1) ta có $a < \sqrt{a}$

Vậy $a < 1$ thì $a < \sqrt{a}$.

B - Căn thức bậc hai. Hằng đẳng thức $\sqrt{A^2} = |A|$

1.14 Tìm x để biểu thức sau có nghĩa:

1. a) $\sqrt{-2x+3}$

b) $\sqrt{-5x}$

c) $\sqrt{-3x+7}$

d) $\sqrt{3x+7}$

e) $\sqrt{\frac{x}{3}}$

f) $\sqrt{5x}$

g) $\sqrt{4-x}$

h) $\sqrt{1+x^2}$

i) $\sqrt{\frac{-5}{x^2+6}}$

j) $\sqrt{\frac{2}{x^2}}$

k) $\sqrt{\frac{1}{-1+x}}$

l) $\sqrt{\frac{4}{x+3}}$

m)

n) $\sqrt{4x^2}$

o) $\sqrt{-3x^2}$

o) $\sqrt{x^2-2x+1}$

P) $\sqrt{-x^2-2x-1}$

Hướng dẫn giải

a) Biểu thức $\sqrt{-2x+3}$ có nghĩa khi

$$-2x+3 \geq 0 \Leftrightarrow x \leq \frac{3}{2}$$

b) Biểu thức đã cho có nghĩa khi $-5x \geq 0 \Leftrightarrow x \leq 0$

c) Biểu thức đã cho có nghĩa khi $-3x+7 \geq 0 \Leftrightarrow x \leq \frac{7}{3}$

d) Biểu thức đã cho có nghĩa khi $3x+7 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq -\frac{7}{3}$

e) Biểu thức đã cho có nghĩa khi $\frac{x}{3} \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 0$

f) Biểu thức đã cho có nghĩa khi $5x \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 0$

g) Biểu thức đã cho có nghĩa khi $4 - x \geq 0 \Leftrightarrow x \leq 4$

h) Biểu thức đã cho có nghĩa khi $1 + x^2 \geq 0 \Leftrightarrow x \in \mathbb{R}$

i) Biểu thức đã cho có nghĩa khi $\frac{-5}{x^2 + 6} \geq 0$

Mà $x^2 \geq 0, \forall x \Rightarrow x^2 + 6 \geq 6 > 0, \forall x \Rightarrow \frac{-5}{x^2 + 6} < 0, \forall x$ nên $x \in \emptyset$

j) Biểu thức đã cho có nghĩa khi $\begin{cases} \frac{2}{x^2} \geq 0 \\ x^2 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow x \neq 0$

k) Biểu thức đã cho có nghĩa khi $\begin{cases} \frac{1}{-1+x} \geq 0 \\ -1+x \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow x < 1$

l) Biểu thức đã cho có nghĩa khi $\begin{cases} \frac{4}{x+3} \geq 0 \\ x+3 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow x > -3$

m) Biểu thức đã cho có nghĩa khi $4 + x^2 \geq 0 \Leftrightarrow x \in \mathbb{R}$

n) Biểu thức đã cho có nghĩa khi $-3x^2 \geq 0 \Leftrightarrow x = 0$

o) Biểu thức đã cho có nghĩa khi $x^2 - 2x + 1 \geq 0 \Leftrightarrow (x-1)^2 \geq 0 \Leftrightarrow x \in \mathbb{R}$

p) Biểu thức đã cho có nghĩa

khi $-x^2 - 2x - 1 \geq 0 \Leftrightarrow -(x+1)^2 \geq 0 \Leftrightarrow (x+1)^2 \leq 0 \Leftrightarrow x = -1$

2. a) $\sqrt{-x^2 + 4x - 5}$

b) $\sqrt{x^2 + 2x + 2}$

c) $\frac{1}{\sqrt{4x^2 - 12x + 9}}$

d) $\frac{1}{\sqrt{x^2 - x + 1}}$

e) $\frac{1}{\sqrt{x^2 - 8x + 15}}$

f) $\frac{1}{\sqrt{3x^2 - 7x + 20}}$

Hướng dẫn giải

a) Biểu thức đã cho có nghĩa khi

$$-x^2 + 4x - 5 \geq 0 \Leftrightarrow -(x^2 - 4x + 5) \geq 0 \Leftrightarrow [(x-2)^2 + 1] \leq 0 \Leftrightarrow x \in \emptyset$$

vì ta luôn có $(x-2)^2 + 1 > 0, \forall x$

b) Biểu thức đã cho có nghĩa khi $x^2 + 2x + 2 \geq 0 \Leftrightarrow (x+1)^2 + 1 \geq 0 \Leftrightarrow x \in \mathbb{R}$

c) Biểu thức đã cho có nghĩa khi $4x^2 - 12x + 9 > 0 \Leftrightarrow (2x - 3)^2 > 0 \Leftrightarrow x \neq \frac{3}{2}$

d) Biểu thức đã cho có nghĩa khi $x^2 - x + 1 \geq 0 \Leftrightarrow \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} \geq 0 \Leftrightarrow x \in R$

e) Biểu thức đã cho có nghĩa khi $x^2 - 8x + 15 \geq 0 \Leftrightarrow (x - 5) \cdot (x - 3) \geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x < 3 \\ x > 5 \end{cases}$

f) Biểu thức đã cho có nghĩa khi

$$3x^2 - 7x + 20 > 0 \Leftrightarrow 3 \cdot \left(x^2 - \frac{7}{3}x + \frac{20}{3}\right) > 0 \Leftrightarrow 3 \cdot \left(x - \frac{7}{6}\right)^2 + \frac{191}{12} > 0 \Leftrightarrow x \in R$$

3. a) $\sqrt{x+3} + \sqrt{x^2-9}$

b) $\sqrt{x-2} + \frac{1}{x-5}$

c) $\frac{2}{x^2-9} - \sqrt{5-2x}$

d) $\sqrt{2x-4} + \sqrt{8-x}$

e) $\frac{\sqrt{4-x}}{\sqrt{x+1}} + \sqrt{9-x^2}$

f) $\sqrt{x^2-4} + 2\sqrt{x-2}$

Hướng dẫn giải:

a) Biểu thức đã cho có nghĩa khi

$$\begin{cases} x+3 \geq 0 \\ x^2-9 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+3 \geq 0 \\ (x+3)(x-3) \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+3 \geq 0 \\ (x-3) \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -3 \\ x \geq 3 \end{cases} \Leftrightarrow x \geq 3$$

b) Biểu thức đã cho có nghĩa khi

$$\begin{cases} x-2 \geq 0 \\ x-5 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 2 \\ x \neq 5 \end{cases}$$

c) Biểu thức đã cho có nghĩa khi

$$\begin{cases} x^2-9 \neq 0 \\ 5-2x \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq \pm 3 \\ x \leq \frac{5}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq -3 \\ x \leq \frac{5}{2} \end{cases}$$

4. a) $\sqrt{(x-1)(x-3)}$

b) $\sqrt{\frac{4}{x+3}}$

c) $\sqrt{\frac{2+x}{5-x}}$

d) $\sqrt{\frac{x-1}{x+2}}$

Hướng dẫn giải

a) Biểu thức đã cho có nghĩa khi

$$(x-1)(x-3) \geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x-1 \leq 0 \\ x-3 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 1 \\ x \geq 3 \end{cases}$$

b) Biểu thức đã cho có nghĩa khi

$$\begin{cases} \frac{4}{x+3} \geq 0 \\ x+3 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow x > -3$$

c) Biểu thức đã cho có nghĩa khi

$$\begin{cases} \frac{2+x}{5-x} \geq 0 \\ 5-x \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2 \leq x \leq 5 \\ x \neq 5 \end{cases} \Leftrightarrow -2 \leq x < 5$$

d) Biểu thức đã cho có nghĩa khi

$$\begin{cases} \frac{x-1}{x+2} \geq 0 \\ x+2 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} x \geq 1 \\ x \leq -2 \end{cases} \\ x \neq -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 1 \\ x < -2 \end{cases}$$

1.15 Tính

a) $5\sqrt{(-2)^4}$

b) $-4\sqrt{(-3)^6}$

c) $5\sqrt{\sqrt{(-5)^8}}$

d) $-0,4\sqrt{(-0,4)^2}$

e) $\sqrt{(0,1)^2}$

f) $\sqrt{(-0,3)^2}$

g) $-\sqrt{(-1,3)^2}$

h) $2\sqrt{(-2)^4} + 3\sqrt{(-2)^8}$

Hướng dẫn giải:

a) $5\sqrt{(-2)^4} = 5 \cdot 2^2 = 20$

b) $-4\sqrt{(-3)^6} = -4 \cdot |(-3)^3| = -4 \cdot 27 = -108$

c) $5\sqrt{\sqrt{(-5)^8}} = 5 \cdot \sqrt{(-5)^4} = 5 \cdot (-5)^2 = 125$

d) $-0,4\sqrt{(-0,4)^2} = -0,4 \cdot |-0,4| = -0,16$

e) $\sqrt{(0,1)^2} = 0,1$

f) $\sqrt{(-0,3)^2} = |-0,3| = 0,3$

$$g) -\sqrt{(-1,3)^2} = -|-1,3| = -1,3$$

$$h) 2\sqrt{(-2)^4} + 3\sqrt{(-2)^8} = 2.4 + 3.16 = 56$$

1.16 Chứng minh rằng:

$$a) 9 + 4\sqrt{5} = (\sqrt{5} + 2)^2$$

$$b) \sqrt{9 - 4\sqrt{5}} - \sqrt{5} = -2$$

$$c) 23 - 8\sqrt{7} = (4 - \sqrt{7})^2$$

$$d) \sqrt{17 - 12\sqrt{2}} + 2\sqrt{2} = 3$$

Giải

a) Ta có:

$$9 + 4\sqrt{5} = (\sqrt{5})^2 + 2 \cdot \sqrt{5} \cdot 2 + 2^2 = (\sqrt{5} + 2)^2$$

b) Thật vậy:

$$\sqrt{9 - 4\sqrt{5}} - \sqrt{5} = \sqrt{(\sqrt{5} - 2)^2} - \sqrt{5} = |\sqrt{5} - 2| - \sqrt{5} = \sqrt{5} - 2 - \sqrt{5} = -2$$

c) Ta có:

$$23 - 8\sqrt{7} = 16 - 2 \cdot 4 \cdot \sqrt{7} + 7 = (4 - \sqrt{7})^2$$

d) Ta có:

$$\sqrt{17 - 12\sqrt{2}} + 2\sqrt{2} = \sqrt{(3 - 2\sqrt{2})^2} + 2\sqrt{2} = |3 - 2\sqrt{2}| + 2\sqrt{2} = 3 - 2\sqrt{2} + 2\sqrt{2} = 3$$

1.17 Rút gọn biểu thức:

$$1. a) \sqrt{(4 - 3\sqrt{2})^2}$$

$$b) \sqrt{(2 + \sqrt{5})^2}$$

$$c) \sqrt{(4 + \sqrt{2})^2}$$

$$d) 2\sqrt{3} + \sqrt{(2 - \sqrt{3})^2}$$

$$e) \sqrt{(2 - \sqrt{3})^2}$$

$$f) \sqrt{(2 - \sqrt{5})^2}$$

$$g) \sqrt{(\sqrt{3} - 1)^2} + \sqrt{(\sqrt{3} - 2)^2}$$

$$h) \sqrt{(2 - \sqrt{5})^2} - \sqrt{(\sqrt{5} - 1)^2}$$

giải:

a) Ta có:

$$\sqrt{(4 - 3\sqrt{2})^2} = |4 - 3\sqrt{2}| = 3\sqrt{2} - 4$$

b) Ta có:

$$\sqrt{(2 + \sqrt{5})^2} = |2 + \sqrt{5}| = 2 + \sqrt{5}$$

c) Ta có:

$$\sqrt{(4+\sqrt{2})^2} = 4+\sqrt{2}$$

d) Ta có:

$$2\sqrt{3} + \sqrt{(2-\sqrt{3})^2} = 2\sqrt{3} + 2 - \sqrt{3} = 2 + \sqrt{3}$$

e) Ta có:

$$\sqrt{(2-\sqrt{3})^2} = 2 - \sqrt{3}$$

f) Ta có:

$$\sqrt{(2-\sqrt{5})^2} = \sqrt{5} - 2$$

g) Ta có:

$$\sqrt{(\sqrt{3}-1)^2} + \sqrt{(\sqrt{3}-2)^2} = \sqrt{3} - 1 + 2 - \sqrt{3} = 1$$

h) Ta có:

$$\sqrt{(2-\sqrt{5})^2} - \sqrt{(\sqrt{5}-1)^2} = \sqrt{5} - 2 - (\sqrt{5} - 1) = -1$$

2. a) $\sqrt{6-2\sqrt{5}}$

b) $\sqrt{7+4\sqrt{3}}$

c) $\sqrt{12-6\sqrt{3}}$

d) $\sqrt{17+12\sqrt{2}}$

e) $\sqrt{22-12\sqrt{2}}$

f) $\sqrt{10-4\sqrt{6}}$

g) $\frac{\sqrt{2}-\sqrt{11+6\sqrt{2}}}{\sqrt{6+2\sqrt{5}}-\sqrt{5}}$

h) $\sqrt{\frac{3+\sqrt{5}}{3-\sqrt{5}}} + \sqrt{\frac{3-\sqrt{5}}{3+\sqrt{5}}}$

giải:

a) $\sqrt{6-2\sqrt{5}} = \sqrt{(\sqrt{5}-1)^2} = \sqrt{5}-1$

b) $\sqrt{7+4\sqrt{3}} = \sqrt{(\sqrt{3}+2)^2} = \sqrt{3}+2$

c) $\sqrt{12-6\sqrt{3}} = \sqrt{(3-\sqrt{3})^2} = 3-\sqrt{3}$

d) $\sqrt{17+12\sqrt{2}} = \sqrt{(2\sqrt{2}+3)^2} = 2\sqrt{2}+3$

e) $\sqrt{22-12\sqrt{2}} = \sqrt{(3\sqrt{2}-2)^2} = 3\sqrt{2}-2$

f) $\sqrt{10-4\sqrt{6}} = \sqrt{(\sqrt{6}-2)^2} = \sqrt{6}-2$

$$g) \frac{\sqrt{2}-\sqrt{11+6\sqrt{2}}}{\sqrt{6+2\sqrt{5}}-\sqrt{5}} = \frac{2-\sqrt{22+12\sqrt{2}}}{\sqrt{2}\left[\sqrt{(1+\sqrt{5})^2}-\sqrt{5}\right]} = \frac{2-\sqrt{(3\sqrt{2}+2)^2}}{\sqrt{2}\cdot(1+\sqrt{5}-\sqrt{5})} = \frac{2-(3\sqrt{2}+2)}{\sqrt{2}} = -3$$

h)

$$\begin{aligned} \sqrt{\frac{3+\sqrt{5}}{\sqrt{3-\sqrt{5}}}} + \sqrt{\frac{3-\sqrt{5}}{\sqrt{3+\sqrt{5}}}} &= \sqrt{\frac{\sqrt{2}(3+\sqrt{5})}{\sqrt{6-2\sqrt{5}}}} + \sqrt{\frac{\sqrt{2}(3-\sqrt{5})}{\sqrt{6+2\sqrt{5}}}} = \sqrt{\frac{\sqrt{2}(\sqrt{5}-1+4)}{\sqrt{5}-1}} + \sqrt{\frac{\sqrt{2}(-\sqrt{5}-1+4)}{\sqrt{5}+1}} \\ &= \sqrt{\sqrt{2} + \frac{4\sqrt{2}}{\sqrt{5}-1}} + \sqrt{-\sqrt{2} + \frac{4\sqrt{2}}{\sqrt{5}+1}} = \sqrt{2\sqrt{2} + \sqrt{10}} + \sqrt{-2\sqrt{2} + \sqrt{10}} \end{aligned}$$

Ta có:

$$\left(\sqrt{2\sqrt{2} + \sqrt{10}} + \sqrt{-2\sqrt{2} + \sqrt{10}}\right)^2 = 2\sqrt{2} + 2\sqrt{10}$$

$$\Rightarrow \sqrt{\frac{3+\sqrt{5}}{\sqrt{3-\sqrt{5}}}} + \sqrt{\frac{3-\sqrt{5}}{\sqrt{3+\sqrt{5}}}} = \sqrt{2\sqrt{2} + 2\sqrt{10}}$$

3. a) $\sqrt{4-2\sqrt{3}} - \sqrt{3}$

b) $\sqrt{11+6\sqrt{2}} - 3 + \sqrt{2}$

c) $\sqrt{11-6\sqrt{2}} - \sqrt{6-4\sqrt{2}}$

d) $\sqrt{11-6\sqrt{3}} + \sqrt{13-4\sqrt{3}}$

e) $(\sqrt{3}+4)\sqrt{19-8\sqrt{3}}$

f) $\sqrt{8+2\sqrt{7}}\sqrt{\frac{4-\sqrt{7}}{2}}$

g) $\frac{\sqrt{2}-\sqrt{11+6\sqrt{2}}}{\sqrt{6+2\sqrt{5}}-\sqrt{5}}$

h) $\sqrt{\frac{3+\sqrt{5}}{\sqrt{3-\sqrt{5}}}} + \sqrt{\frac{3-\sqrt{5}}{\sqrt{3+\sqrt{5}}}}$

giải

a) Ta có:

$$\sqrt{4-2\sqrt{3}} - \sqrt{3} = \sqrt{(\sqrt{3}-1)^2} - \sqrt{3} = \sqrt{3} - 1 - \sqrt{3} = -1$$

b) Ta có:

$$\sqrt{11+6\sqrt{2}} - 3 + \sqrt{2} = \sqrt{(3+\sqrt{2})^2} - 3 + \sqrt{2} = 3 + \sqrt{2} - 3 + \sqrt{2} = 2\sqrt{2}$$

c) Ta có:

$$\sqrt{11-6\sqrt{2}} - \sqrt{6-4\sqrt{2}} = \sqrt{(3-\sqrt{2})^2} - \sqrt{(2-\sqrt{2})^2} = (3-\sqrt{2}) - (2-\sqrt{2}) = 1$$

d) Ta có:

$$\sqrt{11-6\sqrt{3}} + \sqrt{13-4\sqrt{3}} = \sqrt{11-6\sqrt{3}} + \sqrt{(\sqrt{12}-1)^2} = \sqrt{11-6\sqrt{3}} + 2\sqrt{3} - 1$$

e) Ta có:

$$(\sqrt{3}+4)\sqrt{19-8\sqrt{3}} = (\sqrt{3}+4)\sqrt{(4-\sqrt{3})^2} = (\sqrt{3}+4)(4-\sqrt{3}) = 16-3 = 13$$

f) Ta có:

$$\sqrt{8+2\sqrt{7}} \sqrt{\frac{4-\sqrt{7}}{2}} = \sqrt{(1+\sqrt{7})^2} \sqrt{\frac{8-2\sqrt{7}}{4}} = (1+\sqrt{7}) \cdot \frac{\sqrt{(\sqrt{7}-1)^2}}{2} = \frac{(1+\sqrt{7})(\sqrt{7}-1)}{2} = \frac{6}{2} = 3$$

g) Ta có:

$$\frac{\sqrt{2}-\sqrt{11+6\sqrt{2}}}{\sqrt{6+2\sqrt{5}}-\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{2}-\sqrt{(3+\sqrt{2})^2}}{\sqrt{(1+\sqrt{5})^2}-\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{2}-(3+\sqrt{2})}{(1+\sqrt{5})-\sqrt{5}} = \frac{-3}{1} = -3$$

h)

$$\begin{aligned} \sqrt{\frac{3+\sqrt{5}}{\sqrt{3}-\sqrt{5}}} + \sqrt{\frac{3-\sqrt{5}}{\sqrt{3}+\sqrt{5}}} &= \sqrt{\frac{\sqrt{2}(3+\sqrt{5})}{\sqrt{6-2\sqrt{5}}}} + \sqrt{\frac{\sqrt{2}(3-\sqrt{5})}{\sqrt{6+2\sqrt{5}}}} = \sqrt{\frac{\sqrt{2}(\sqrt{5}-1+4)}{\sqrt{5}-1}} + \sqrt{\frac{\sqrt{2}(-\sqrt{5}-1+4)}{\sqrt{5}+1}} \\ &= \sqrt{\sqrt{2} + \frac{4\sqrt{2}}{\sqrt{5}-1}} + \sqrt{-\sqrt{2} + \frac{4\sqrt{2}}{\sqrt{5}+1}} = \sqrt{2\sqrt{2} + \sqrt{10}} + \sqrt{-2\sqrt{2} + \sqrt{10}} \end{aligned}$$

Ta có:

$$\left(\sqrt{2\sqrt{2} + \sqrt{10}} + \sqrt{-2\sqrt{2} + \sqrt{10}}\right)^2 = 2\sqrt{2} + 2\sqrt{10}$$

$$\Rightarrow \sqrt{\frac{3+\sqrt{5}}{\sqrt{3-\sqrt{5}}}} + \sqrt{\frac{3-\sqrt{5}}{\sqrt{3+\sqrt{5}}}} = \sqrt{2\sqrt{2} + 2\sqrt{10}}$$

4. a) $\sqrt{6+2\sqrt{4-2\sqrt{3}}}$

b) $\sqrt{6-2\sqrt{3+\sqrt{13+4\sqrt{3}}}}$

c) $\sqrt{\sqrt{3} + \sqrt{48-10\sqrt{7+4\sqrt{3}}}}$

d) $\sqrt{23-6\sqrt{10+4\sqrt{3-2\sqrt{2}}}}$

giải:

a) ta có:

$$\sqrt{6+2\sqrt{4-2\sqrt{3}}} = \sqrt{6+2\sqrt{(1-\sqrt{3})^2}} = \sqrt{6+2(\sqrt{3}-1)} = \sqrt{4+2\sqrt{3}} = \sqrt{(\sqrt{3}+1)^2} = \sqrt{3}+1$$

b) ta có:

$$\begin{aligned} \sqrt{6-2\sqrt{3+\sqrt{13+4\sqrt{3}}}} &= \sqrt{6-2\sqrt{3+\sqrt{(1+2\sqrt{3})^2}}} = \sqrt{6-2\sqrt{3+(1+2\sqrt{3})}} = \sqrt{6-2\sqrt{4+2\sqrt{3}}} \\ &= \sqrt{6-2\sqrt{(1+\sqrt{3})^2}} = \sqrt{6-2(1+\sqrt{3})} = \sqrt{4-2\sqrt{3}} = \sqrt{(\sqrt{3}-1)^2} = \sqrt{3}-1 \end{aligned}$$

c) ta có:

$$\begin{aligned} \sqrt{\sqrt{3} + \sqrt{48-10\sqrt{7+4\sqrt{3}}}} &= \sqrt{\sqrt{3} + \sqrt{48-10\sqrt{(2+\sqrt{3})^2}}} = \sqrt{\sqrt{3} + \sqrt{48-10(2+\sqrt{3})}} \\ &= \sqrt{\sqrt{3} + \sqrt{28-10\sqrt{3}}} = \sqrt{\sqrt{3} + \sqrt{(5-\sqrt{3})^2}} = \sqrt{\sqrt{3} + 5 - \sqrt{3}} = \sqrt{5} \end{aligned}$$

d) ta có:

$$\begin{aligned} \sqrt{23-6\sqrt{10+4\sqrt{3-2\sqrt{2}}}} &= \sqrt{23-6\sqrt{10+4\sqrt{(\sqrt{2}-1)^2}}} = \sqrt{23-6\sqrt{10+4(\sqrt{2}-1)}} \\ &= \sqrt{23-6\sqrt{6+4\sqrt{2}}} = \sqrt{23-6\sqrt{(2+\sqrt{2})^2}} = \sqrt{23-6(2+\sqrt{2})} = \sqrt{11-6\sqrt{2}} = 3-\sqrt{2} \end{aligned}$$

$$5. a) \frac{x^2 - 5}{x + \sqrt{5}}$$

$$b) \frac{x^2 + 2\sqrt{2}x + 2}{x^2 - 2}$$

Giải:

a) ta có

$$\frac{x^2 - 5}{x + \sqrt{5}} = x - \sqrt{5}$$

b) ta có

$$\frac{x^2 + 2\sqrt{2}x + 2}{x^2 - 2} = \frac{(x + \sqrt{2})^2}{(x + \sqrt{2})(x - \sqrt{2})} = \frac{x + \sqrt{2}}{x - \sqrt{2}}$$

1.18 Rút gọn biểu thức sau (loại bỏ dấu căn và dấu trị tuyệt đối):

$$1. a) \sqrt{9x^2} - 2x \text{ với } x < 0$$

$$b) 2\sqrt{x^2} \text{ với } x \geq 0$$

$$c) 3\sqrt{(x-2)^2} \text{ với } x < 2$$

$$d) 2\sqrt{x^2} - 5x \text{ với } x < 0$$

$$e) \sqrt{25x^2} + 3x \text{ với } x \geq 0$$

$$f) \sqrt{9x^4} + 3x^2 \text{ với } x \text{ bất kỳ}$$

$$g) x - 4 + \sqrt{16 - 8x + x^2} \text{ với } x > 4$$

giải:

a) Ta có:

$$\sqrt{9x^2} - 2x = 3|x| - 2x = -3x - 2x = -5x$$

b) Ta có:

$$2\sqrt{x^2} = 2|x| = 2x$$

c) Ta có:

$$3\sqrt{(x-2)^2} = 3|x-2| = 3(2-x) = 6-2x$$

d) Ta có:

$$2\sqrt{x^2} - 5x = 2|x| - 5x = -2x - 5x = -7x$$

e) Ta có:

$$\sqrt{25x^2} + 3x = 5|x| + 3x = 5x + 3x = 8x$$

f) Ta có:

$$\sqrt{9x^4} + 3x^2 = 3x^2 + 3x^2 = 6x^2$$

g) Ta có:

$$x-4+\sqrt{16-8x+x^2} = x-4+\sqrt{(x-4)^2} = x-4+|x-4| = x-4+x-4 = 2x-8$$

2. a) $A = \sqrt{1-4a+4a^2} - 2a$

b) $B = \sqrt{4x^2-12x+9} + 2x-1$

c) $C = \frac{5-x}{\sqrt{x^2-10x+25}}$

d) $D = \sqrt{(x-1)^2} + \frac{x-1}{\sqrt{x^2-2x+1}}$

e) $E = \frac{\sqrt{x^2-6x+9}}{x-3}$

f) $F = x^2 - \sqrt{x^4+8x^2+16}$

giải:

a) Ta có:

$$A = \sqrt{1-4a+4a^2} - 2a = |2a-1| - 2a$$

$$a \geq \frac{1}{2} \Rightarrow A = 2a-1-2a = -1$$

$$a < \frac{1}{2} \Rightarrow A = 1-2a-2a = 1-4a$$

b) Ta có:

$$\sqrt{4x^2-12x+9} + 2x-1 = |2x-3| + 2x-1$$

$$x \geq \frac{3}{2} \Rightarrow A = 2x-3+2x-1 = 4x-4$$

$$x < \frac{3}{2} \Rightarrow A = -2x+3+2x-1 = 2$$

c) Ta có: đkxd: $x \neq 5$

$$C = \frac{5-x}{\sqrt{x^2-10x+25}} = \frac{5-x}{|5-x|}$$

$$x > 5 \Rightarrow C = \frac{5-x}{x-5} = -1$$

$$x < 5 \Rightarrow C = \frac{5-x}{5-x} = 1$$

d) Ta có: đkxd: $x \neq 1$

$$D = \sqrt{(x-1)^2} + \frac{x-1}{\sqrt{x^2-2x+1}} = |x-1| + \frac{x-1}{|x-1|}$$

$$x > 1 \Rightarrow D = x-1 + \frac{x-1}{x-1} = x-1+1 = x$$

$$x < 1 \Rightarrow D = -x+1 + \frac{x-1}{-x+1} = -x+1-1 = -x$$

e) Ta có: đkxđ: $x \neq 3$

$$E = \frac{\sqrt{x^2-6x+9}}{x-3} = \frac{|x-3|}{x-3}$$

$$x > 3 \Rightarrow E = \frac{x-3}{x-3} = 1$$

$$x < 3 \Rightarrow E = \frac{x-3}{-x+3} = -1$$

f) Ta có:

$$F = x^2 - \sqrt{x^4+8x^2+16} = x^2 - |x^2+4| = x^2 - (x^2+4) = -4$$

1.19 Chứng tỏ: $x+2\sqrt{2x-4} = (\sqrt{2} + \sqrt{x-2})^2$ với $x \geq 2$

Áp dụng rút gọn biểu thức sau:

$$\sqrt{x+2\sqrt{2x-4}} + \sqrt{x+2\sqrt{2x-4}} \text{ với } x \geq 2$$

Thật vậy

$$VP = (\sqrt{2} + \sqrt{x-2})^2 = 2 + 2 \cdot \sqrt{2} \cdot \sqrt{x-2} + (\sqrt{x-2})^2 = x + 2\sqrt{2x-4} = VT$$

Ta có:

$$\sqrt{x+2\sqrt{2x-4}} + \sqrt{x+2\sqrt{2x-4}} = |\sqrt{2} + \sqrt{x-2}| + |\sqrt{2} + \sqrt{x-2}| = 2(\sqrt{2} + \sqrt{x-2})$$

1.20 Rút gọn biểu thức sau (loại bỏ dấu căn và dấu trị tuyệt đối):

a) $\sqrt{x-4\sqrt{x-4}}$ với $x \geq 4$

b) $\sqrt{x-2+2\sqrt{x-3}}$ với $x \geq 3$

c) $\sqrt{x+2\sqrt{x-1}} + \sqrt{x-2\sqrt{x-1}}$ với $x \geq 1$

d) $\sqrt{x-2\sqrt{x+1}} + \sqrt{x+2\sqrt{x+1}}$ với $x \geq 0$

giải:

a) Ta có:

$$\sqrt{x-4\sqrt{x-4}} = \sqrt{x-4-4\sqrt{x-4}+4} = \sqrt{(\sqrt{x-4}+2)^2} = \sqrt{x-4}+2$$

b) Ta có:

$$\sqrt{x-2+2\sqrt{x-3}} = \sqrt{(\sqrt{x-3}+1)^2} = |\sqrt{x-3}+1| = \sqrt{x-3}+1$$

c) Ta có

$$C = \sqrt{x+2\sqrt{x-1}} + \sqrt{x-2\sqrt{x-1}} = \sqrt{(\sqrt{x-1}+1)^2} + \sqrt{(\sqrt{x-1}-1)^2} = |\sqrt{x-1}+1| + |\sqrt{x-1}-1|$$

$$x \geq 2 \Rightarrow C = \sqrt{x-1}+1 + \sqrt{x-1}-1 = 2\sqrt{x-1}$$

$$1 \leq x < 2 \Rightarrow C = \sqrt{x-1}+1 - \sqrt{x-1}+1 = 2$$

d) Ta có

$$D = \sqrt{x-2\sqrt{x}+1} + \sqrt{x+2\sqrt{x}+1} = \sqrt{(\sqrt{x}-1)^2} + \sqrt{(\sqrt{x}+1)^2} = |\sqrt{x}-1| + |\sqrt{x}+1|$$

$$x \geq 1 \Rightarrow D = \sqrt{x}-1 + \sqrt{x}+1 = 2\sqrt{x}$$

$$0 \leq x < 1 \Rightarrow D = -\sqrt{x}+1 + \sqrt{x}+1 = 2$$