BỘ ĐỀ LUYỆN THI VÀO LỚP 10 CHUYÊN TOÁN

ĐỀ SỐ 1

Câu 1 ***(2,0 điểm)***

a) Cho biểu thức $P=\dfrac{\sqrt{a}+\sqrt{b}-1}{a+\sqrt{ab}}+\dfrac{\sqrt{a}-\sqrt{b}}{2\sqrt{ab}}\left(\dfrac{\sqrt{b}}{a-\sqrt{ab}}+\dfrac{\sqrt{b}}{a+\sqrt{ab}}\right)$ (với $a,b>0$ và $a\neq b$).

Rút gọn biểu thức P và tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$Q=2019+4P+13\sqrt{a}-6a+a\sqrt{a}.$$

b) Tìm tất cả các cặp số nguyên dương (x,y) sao cho cả hai số x^2+8y và y^2+8x đều là các số chính phương.

Câu 2 ***(2,0 điểm)***

a) Giải phương trình: $2x^3+3x^2+4x+3=3x\left(x+1\right)\sqrt[3]{x+2}$.

b) Giải hệ phương trình: $\begin{cases} x(x^2+y^2)+y(xy+12)=0 \\ x^2+4(2y^2-3)=0 \end{cases}$.

Câu 3 ***(0,5 điểm).*** Cho hai hàm số $y=2x^2$ và $y=|mx|$. Tìm m để hai đồ thị của hai hàm số đã cho cắt nhau tại ba điểm phân biệt là ba đỉnh của tam giác đều.

Câu 4 ***(2,0 điểm).*** Cho hình chữ nhật $ABCD$ có $AB=2BC$. Trên cạnh BC lấy điểm E. Tia AE cắt đường thẳng CD tại F.

a) Chứng minh rằng $4\left(\dfrac{1}{AB^2}-\dfrac{1}{AE^2}\right)=\dfrac{1}{AF^2}$.

b) Từ một điểm M trong tam giác ABC, vẽ $MI\perp BC, MH\perp CA, MK\perp AB$. Xác định vị trí điểm M để $MI^2+MH^2+MK^2$ đạt giá trị nhỏ nhất.

Câu 5 ***(2,0 điểm).*** Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O), D là một điểm trên cạnh BC (D khác B và C). Gọi M,N lần lượt là trung điểm của các cạnh AB,AC. Đường thẳng MN cắt (O) tại các điểm P,Q (P,Q lần lượt thuộc $\overset{\frown}{AB}$ và $\overset{\frown}{AC}$). Đường tròn ngoại tiếp tam giác BDP cắt AB tại I (khác B). Các đường thẳng DI và AC cắt nhau tại K.

a) Chứng minh rằng tứ giác $AIPK$ nội tiếp và $\dfrac{PK}{PD}=\dfrac{QB}{QA}$.

b) Đường thẳng CP cắt đường tròn ngoại tiếp tam giác BDP tại G (khác P). Đường thẳng IG cắt đường thẳng BC tại E. Chứng minh rằng khi D di chuyển trên BC thì $\dfrac{CD}{CE}$ không đổi.

Câu 6 ***(1,0 điểm).*** Cho a,b,c là các số thực dương. Chứng minh rằng

$$\frac{8}{(a+b)^2+4abc}+\frac{8}{(b+c)^2+4abc}+\frac{8}{(c+a)^2+4abc}+a^2+b^2+c^2\geq\frac{8}{a+3}+\frac{8}{b+3}+\frac{8}{c+3}.$$

Câu 7 ***(0,5 điểm).*** Cho tập $X=\{0;1;2;3;4;5\}$. Hỏi từ tập X ta lập được bao nhiêu số tự nhiên $\overline{abcdef}$ gồm 6 chữ số khác nhau thỏa mãn: $d+e+f-a-b-c=1$.

===Hết===

ĐỀ SỐ 2

Câu 1 ***(2,0 điểm).***

a) Cho biểu thức

$$P=\left(\frac{\sqrt{a-b}}{\sqrt{a+b}+\sqrt{a-b}}+\frac{a-b}{\sqrt{a^2-b^2}-a+b}\right):\frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a^2+b^2}\ \text{(với } a>b>0\text{)}$$

Rút gọn biểu thức P và tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức này khi $b=a-1$.

b) Tìm tất cả các cặp số nguyên dương $(x;y)$ thỏa mãn $\frac{x^2}{y}+\frac{y^2}{x}=9$.

Câu 2 ***(2,0 điểm)***

a) Giải phương trình $\sqrt[3]{x^2-1}-\sqrt{x^3-2}+x=0$.

b) Giải hệ phương trình $\begin{cases} x^4+y^2=\dfrac{697}{81} \\ x^2+y^2+xy-3x-4y+4=0 \end{cases}$.

Câu 3 ***(0,5 điểm)***

Cho parabol $(P): y=x^2$ và đường thẳng $d: y=mx+3$. Tìm m để đường thẳng d cắt (P) tại hai điểm A,B phân biệt sao cho độ dài AB ngắn nhất.

Câu 4 ***(2,0 điểm).*** Trong tam giác ABC lấy điểm O sao cho $\widehat{ABO}=\widehat{ACO}$. Gọi H,K lần lượt là hình chiếu của O lên AB và AC.

a) Chứng minh rằng $OB.\sin\widehat{OAC}=OC.\sin\widehat{OAB}$.

b) Gọi M,N lần lượt là trung điểm của BC và HK. Chứng minh rằng MN vuông góc với HK.

Câu 5 ***(2,0 điểm).*** Cho tam giác nhọn ABC có $AB<AC$, nội tiếp đường tròn (O) và ngoại tiếp đường tròn (I). Điểm D thuộc cạnh AC sao cho $\widehat{ABD}=\widehat{ACB}$. Đường thẳng AI cắt đường tròn ngoại tiếp tam giác DIC tại điểm thứ hai là E và cắt đường tròn (O) tại điểm thứ hai là Q. Đường thẳng đi qua E và song song với AB cắt BD tại P.

a) Chứng minh tam giác QBI cân và $BP.BI=BE.BQ$.

b) Gọi J là tâm đường tròn nội tiếp tam giác ABD, K là trung điểm của EJ. Chứng minh rằng $PK\,//\,JB$.

Câu 6 ***(1,0 điểm)***

Cho a,b,c là các số thực dương sao cho $ab+bc+ca=3abc$. Chứng minh rằng

$$\frac{1}{2a^2+b^2}+\frac{1}{2b^2+c^2}+\frac{1}{2c^2+a^2}\le 1.$$

Câu 7 ***(0,5 điểm)***

Có bao nhiêu số tự nhiên có 4 chữ số mà tổng các chữ số của nó là bội của 4.

===Hết===

ĐỀ SỐ 3

Câu 1 *(2,0 điểm)*

a) Cho a,b,c là ba số thực dương thỏa mãn điều kiện $a+b+c+\sqrt{abc}=4$. Tính giá trị của biểu thức $P=\sqrt{a(4-b)(4-c)}+\sqrt{b(4-c)(4-a)}+\sqrt{c(4-a)(4-b)}-\sqrt{abc}+2019$.

b) Với mọi số nguyên dương n, hãy xác định theo n số tất cả các cặp thứ tự hai số nguyên dương $(x;y)$ sao cho $x^2-y^2=100.30^{2n}$ đồng thời số cặp này không thể là số chính phương.

Câu 2 *(2,0 điểm)*

a) Giải phương trình: $\left(x+\sqrt{x}+1\right)\sqrt{2-x}=x^2+x+1$.

b) Giải hệ phương trình: $\begin{cases}\sqrt{5x^2+2xy+2y^2}+\sqrt{2x^2+2xy+5y^2}=3\left(x+y\right)\\ \sqrt{2x+y+1}+2\sqrt[3]{7x+12y+8}=2xy+y+5\end{cases}$.

Câu 3 *(0,5 điểm).* Cho parabol $(P): y=x^2$ và đường thẳng $d: y=5mx+4m\ (m\neq 0)$. Tìm m để đường thẳng d cắt (P) tại hai điểm phân biệt A,B có hoành độ lần lượt là x_1,x_2 sao cho

$$A=\frac{m^2}{x_1^2+5mx_2+12m}+\frac{x_2^2+5mx_1+12m}{m^2}\ \text{ đạt giá trị nhỏ nhất.}$$

Câu 4 *(2,0 điểm).* Cho hình vuông $ABCD$, điểm E nằm trên cạnh BC (E khác B, E khác C). Hai đường thẳng AE và CD cắt nhau tại F.

a) Chứng minh $\dfrac{1}{AE^2}+\dfrac{1}{AF^2}=\dfrac{1}{AB^2}$.

b) Gọi G là trọng tâm của tam giác ACD và I là trung điểm của cạnh AD. Điểm M di động trên đoạn thẳng ID, đường thẳng MG cắt AC tại N. Chứng minh $\dfrac{AD}{AM}+\dfrac{AC}{AN}=3$ và khi giá trị của tích $AM.AN$ nhỏ nhất hãy tính tỉ số $\dfrac{AM}{AD}$.

Câu 5 *(2,0 điểm).* Cho đường tròn $(O;R)$ và điểm A cố định trên $(O;R)$. Gọi M, N là các giao điểm của hai đường tròn $(O;R)$ và $(A;R)$; H là điểm thay đổi trên cung nhỏ $\overset{\frown}{MN}$ của đường tròn $(A;R)$.Đường thẳng qua H và vuông góc với AH cắt $(O;R)$ tại B, C. Kẻ $HI\perp AB\ (I\in AB), HK\perp AC\ (K\in AC)$.

a) Chứng minh rằng IK luôn vuông góc với một đường thẳng cố định và $AB.AC=2R^2$.

b) Tìm giá trị lớn nhất của diện tích ΔAIK khi H thay đổi.

Câu 6 *(1,0 điểm)* Cho a,b,c là độ dài ba cạnh của một tam giác. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $P=\dfrac{4a}{b+c-a}+\dfrac{9b}{a+c-b}+\dfrac{16c}{a+b-c}$.

Câu 7 *(0,5 điểm).* Cho tập $X=\left\{1,2,3,...,81\right\}$. Chứng minh rằng trong 3 phần tử tùy ý của X luôn có hai phần tử a,b sao cho : $0<\sqrt[4]{a}-\sqrt[4]{b}<1$.

===Hết===

ĐỀ SỐ 4

Câu 1 ***(2,0 điểm)***

a) Cho $x = 1 + \sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{4}$. Tính giá trị của biểu thức $P = \sqrt{x^3 - 3x^2 - 3x + 2019}$.

b) Tìm các cặp số nguyên dương $(a;b)$ sao cho

$$\frac{4}{a} + \sqrt[3]{4-b} = \sqrt[3]{4 + 4\sqrt{b} + b} + \sqrt[3]{4 - 4\sqrt{b} + b}.$$

Câu 2 ***(2,0 điểm)***

a) Giải phương trình: $13\sqrt{x^2 - x^4} + 9\sqrt{x^2 + x^4} = 16$.

b) Giải hệ phương trình: $\begin{cases} x^4 - y^4 = 240 \\ x^3 - 2y^3 = 3\left(x^2 - 4y\right)^2 - 4\left(x - 8y\right) \end{cases}$.

Câu 3 ***(0,5 điểm)***

Cho parabol $(P): y = 2ax^2$ $(a > 0)$ và đường thẳng $d: y = 4x - y - 2a^2$. Tìm a để d cắt (P) tại hai điểm phân biệt A, B có hoành độ x_1, x_2 sao cho biểu thức

$$Q = \frac{8}{x_1 + x_2} + \frac{1}{2x_1x_2}$$

đạt giá trị nhỏ nhất.

Câu 4 ***(2,0 điểm)*** **.** Cho hình vuông $ABCD$ có $\widehat{xAy} = 45^0$ quay quanh đỉnh A. Các tia Ax, Ay cắt cạnh BC và CD theo thứ tự tại P và Q. Kẻ PM song song với AQ và QN song song với AP. Đường thẳng MN cắt AP tại E và cắt AQ tại F. Chứng minh rằng

a) Tam giác AMN cân.

b) $EF^2 = ME^2 + NF^2$.

Câu 5 ***(2,0 điểm)***

Cho đường tròn $\left(O;R\right)$ và đường tròn $\left(O';R'\right)$ cắt nhau tại A và B. Trên tia đối của AB lấy điểm C. Kẻ tiếp tuyến CD, CE với đường tròn tâm O, trong đó D, E là các tiếp điểm và E nằm trong đường tròn (O'). Đường thẳng AD, AE cắt đường tròn (O') lần lượt tại M và N ($M, N \neq A$). Tia DE cắt MN tại I. Chứng minh rằng:

a) $\triangle MIB \sim \triangle AEB$

b) $O'I \perp MN$.

Câu 6 ***(1,0 điểm)***

Cho các số dương a, b, c thỏa mãn $a + b + c = 1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P = 2(a^2b + b^2c + c^2a) + (a^2 + b^2 + c^2) + 4abc.$$

Câu 7 ***(0,5 điểm).*** Cho tập $A = \left\{1, 2, ..., 16\right\}$. Hãy tìm số nguyên dương k nhỏ nhất sao cho trong mỗi tập con gồm k phần tử của A đều tồn tại hai số phân biệt a, b mà $a^2 + b^2$ là một số nguyên tố.

===Hết===

ĐỀ SỐ 5

Câu 1 ***(2,0 điểm)*** a) Cho a,b là các số dương, $a \neq b$ và

$$\left[\frac{(a+2b)^2-(2a+b)^2}{a+b}\right]:\left[\frac{\left(a\sqrt{a}+b\sqrt{b}\right)\left(a\sqrt{a}-b\sqrt{b}\right)}{a-b}-3ab\right]=3.$$

Tính $S=\dfrac{1+2ab-2(a^2+b^2)}{a^2+b^2}$.

b) Cho các số nguyên dương a,b,c,d thoả mãn $a<b\le c<d;\ ad=bc;\ \sqrt{d}-\sqrt{a}\le 1$. Chứng minh rằng a là một số chính phương.

Câu 2 ***(2,0 điểm)***

a) Giải phương trình: $x^4+x^3+2x\sqrt[3]{x\left(x^2-2\right)^2}+4=6x^2+2x+\left(x^2+x-2\right)\sqrt[3]{x^4-2x^2}$.

b) Giải hệ phương trình: $\begin{cases}\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}=9\\ \left(\dfrac{1}{\sqrt[3]{x}}+\dfrac{1}{\sqrt[3]{y}}\right)\left(1+\dfrac{1}{\sqrt[3]{x}}\right)\left(1+\dfrac{1}{\sqrt[3]{y}}\right)=18\end{cases}$.

Câu 3 ***(0,5 điểm).*** Cho parabol $(P): y=x^2$ và hai điểm A,B thuộc (P) có hoành độ lần lượt là -1 và 2. Tìm M thuộc $\overset{\frown}{AB}$ sao cho tam giác MAB có diện tích lớn nhất.

Câu 4 ***(2,0 điểm).*** Cho hình chữ nhật $ABCD$ có chiều dài và chiều rộng tương ứng là a,b. Điểm G nằm trên đường chéo AC sao cho $\dfrac{GA}{GC}=\dfrac{1}{2}$. Một đường d bất kì qua G cắt các cạnh AD và AB tương ứng tại P và Q.

a) Chứng minh rằng $\dfrac{AD}{AP}+\dfrac{AB}{AQ}$ có giá trị không đổi.

b) Đặt $AP=x$ và gọi S là diện tích ngũ giác $BCDPQ$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$M=\dfrac{2}{3\left(S+\dfrac{ax^2}{6x-2b}\right)}+\sqrt{\dfrac{3}{a+1}}$ biết rằng $a+b\le 3$.

Câu 5 ***(2,0 điểm).*** Cho hình vuông $ABCD$ nội tiếp đường tròn $(O;R)$. Trên cung nhỏ AD lấy điểm E (E không trùng với A và D). Tia EB cắt các đường thẳng AD,AC lần lượt tại I và K. Tia EC cắt các đường thẳng DA,DB lần lượt tại M,N. Hai đường thẳng AN,DK cắt nhau tại P.

a) Chứng minh rằng các tứ giác $IABN$, $EPND$ nội tiếp và $\widehat{EKM}=\widehat{DKM}$.

b) Khi điểm M ở vị trí trung điểm của AD. Hãy xác định độ dài đoạn AE theo R.

Câu 6 ***(1,0 điểm).*** Cho $a,b,c>0$ bất kỳ. Chứng minh rằng:

$$\sqrt{\frac{\left(a^2+bc\right)(b+c)}{a\left(b^2+c^2\right)}}+\sqrt{\frac{\left(b^2+ca\right)(c+a)}{b\left(c^2+a^2\right)}}+\sqrt{\frac{\left(c^2+ab\right)(a+b)}{c\left(a^2+b^2\right)}}\ge 3\sqrt{2}.$$

Câu 7 ***(0,5 điểm).*** Trong một hình vuông cạnh bằng 1 ta sẽ một số đường tròn có tổng chu vi bằng 10. Chứng minh rằng tồn tại một đường thẳng cắt ít nhất bốn đường tròn trong chúng.

ĐỀ SỐ 6

Câu 1 ***(2,0 điểm)***

a) Cho $x>1, y<0$ thỏa mãn điều kiện $\dfrac{(x+y)(x^3-y^3)\sqrt{4x-\sqrt{16x-4}}}{\left(1-\sqrt{4x-1}\right)(x^2y^2+xy^3+y^4)}=-2019$.

Tính tỉ số $\dfrac{x}{y}$.

b) Tìm tất cả các số tự nhiên n sao cho $n^7-n^5+2n^4+n^3-n^2+1$ có đúng một ước nguyên tố.

Câu 2 ***(2,0 điểm)***

a) Giải phương trình: $\sqrt{x^2+x+2}=\dfrac{x^2+5x+2}{2x+2}$.

b) Giải hệ phương trình: $\begin{cases} 6x^2\sqrt{x^3-6x+5}=\left(x^2+2x-6\right)\left(x^3+4\right) \\ x+\dfrac{2}{x}=1+\dfrac{2}{y^2} \end{cases}$.

Câu 3 ***(0,5 điểm).*** Cho parabol $(P): y=-\dfrac{1}{2}x^2$ và d là đường thẳng đi qua hai điểm $I(0;-2), M(m;0)$ với $m\neq 0$. Chứng minh rằng d luôn cắt (P) tại hai điểm phân biệt A, B với độ dài $AB>4$.

Câu 4 ***(2,0 điểm)*** Giả sử $ABCD$ là một miếng bìa hình vuông cạnh a. Trên mặt phẳng có hai đường thẳng song song l_1 và l_2 cách nhau 1 đơn vị. Hình vuông $ABCD$ được đặt trong mặt phẳng đó sao cho AB và AD lần lượt cắt l_1 tại E, F. Cũng vậy CB và CD lần lượt cắt l_2 tại G và H. Gọi chu vi của các $\triangle AEF$ và $\triangle CGH$ tương ứng là m_1, m_2. Lấy hai điểm M và N lần lượt nằm trên BC và DC sao cho $NH=AE$ và $MG=AF$.

a) Chứng minh rằng tổng m_1+m_2 là chu vi $\triangle MCN$.

b) Chứng minh rằng với cách đặt tấm bìa hình vuông như thế, thì dù đặt thế nào đi nữa m_1+m_2 vẫn là một hằng số.

Câu 5 ***(2,0 điểm).*** Cho tứ giác $ABCD$ nội tiếp (O) $(AD<BC)$. Gọi I là giao điểm của AC và BD. Vẽ đường kính CM, DN. Gọi K là giao điểm của AN, BM. Đường tròn ngoại tiếp tam giác IBC cắt đường tròn ngoại tiếp tam giác NOC tại điểm J khác C.

a) Chứng minh $KBNJ$ là tứ giác nội tiếp

b) Chứng minh I, K, O thẳng hàng.

Câu 6 ***(2,0 điểm).*** Cho a, b, c là các số thực thỏa mãn $a+b+c=0$. Chứng minh rằng

$$\frac{a-1}{a^2+8}+\frac{b-1}{b^2+8}+\frac{c-1}{c^2+8}\geq -\frac{3}{8}.$$

Câu 7 ***(0,5 điểm).*** Cho một lớp học có 35 học sinh, các học sinh này tổ chức một số câu lạc bộ môn học. Mỗi học sinh tham gia đúng một câu lạc bộ. Nếu chọn ra 10 học sinh bất kì thì luôn có ít nhất 3 học sinh tham gia cùng một câu lạc bộ. Chứng minh có một câu lạc bộ gồm ít nhất 9 học sinh.

===Hết===

ĐỀ SỐ 7

Câu 1 ***(2,0 điểm)***

a) Cho $x = \dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1}}$. Tính giá trị của biểu thức

$$P = (4x^5 + 4x^4 - x^3 + 1)^{29} + \left(\sqrt{4x^5 + 4x^4 - 5x^3 + 5x + 3}\right)^9 + \left(\frac{1-\sqrt{2}x}{\sqrt{2x^2 + 2x}}\right)^{2019}.$$

b) Tìm tất cả các cặp số nguyên dương (x, n) sao cho $x^n + 2^n + 1$ là một ước của $x^{n+1} + 2^{n+1} + 1$.

Câu 2 ***(2,0 điểm)***

a) Giải phương trình: $2x^2 - 11x + 21 - 3\sqrt[3]{4x-4} = 0$.

b) Giải hệ phương trình: $\begin{cases} x^3 + 3xy^2 = -49 \\ x^2 - 8xy + y^2 = 8y - 17x \end{cases}$.

Câu 3 ***(0,5 điểm).*** Cho parabol $(P): y = \dfrac{1}{3}x^2$ và đường thẳng $d: y = -x + \dfrac{4}{3}$. Gọi A và B là giao điểm của d với (P). Tìm điểm M trên trục tung sao cho độ dài $MA + MB$ nhỏ nhất.

Câu 4 ***(2,0 điểm)***

Cho tam giác ABC cân tại A có $\widehat{A} = 36^0$. Phân giác BD và đường cao AH cắt nhau tại I. Tia phân giác $\widehat{ADB}$ cắt AH tại O. Gọi E là giao điểm của BO và AC; F là giao điểm của CI và DO.

a) Chứng minh $\triangle BEF$ cân

b) Chứng minh các tứ giác $BCEF$ và $BDAF$ là hình thoi.

Câu 5 ***(2,0 điểm)***

Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O). Lấy một điểm P trên cung BC không chứa điểm A của (O). Gọi (K) là đường tròn đi qua A, P tiếp xúc với AC. Đường tròn (K) cắt PC tại S khác P. Gọi (L) là đường tròn qua A, P đồng thời tiếp xúc với AB. Đường tròn (L) cắt PB tại T khác P.Gọi D là điểm đối xứng với A qua BC.

a) Chứng minh BD là tiếp tuyến của đường tròn ngoại tiếp tam giác DPT.

b) Ba điểm S, D, T thẳng hàng.

Câu 6 ***(1,0 điểm).*** Cho a, b, c là các số thực dương. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P = \frac{2a^2 + ab}{\left(b + \sqrt{ca} + c\right)^2} + \frac{2b^2 + bc}{\left(c + \sqrt{ab} + a\right)^2} + \frac{2c^2 + ca}{\left(a + \sqrt{bc} + b\right)^2}.$$

Câu 7 ***(0,5 điểm).*** Cho tập $X = \{1, 2, 3, ..., 200\}$. Chứng minh rằng với mọi tập con A của X có số phần tử bằng 101 luôn tồn tại hai phần tử mà phần tử này là bội của phần tử kia.

===Hết===

ĐỀ SỐ 8

Câu 1 ***(2,0 điểm)***

a) Cho biểu thức $P=\left(\dfrac{1+\sqrt{x}}{1+\sqrt{xy}}+\dfrac{\sqrt{xy}+\sqrt{x}}{1-\sqrt{xy}}+1\right):\dfrac{2x\sqrt{y}+2\sqrt{xy}}{1-xy}$ (với $x>0, y>0, xy\neq 1$).

Rút gọn biểu thức P và tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $Q=\dfrac{16xy}{x+y}P+(x^2+y^2)P^2$.

b) Tìm các cặp số nguyên $(x;y)$ thỏa: $y^{6060}=x^{6060}-x^{4040}-x^{2020}+2$.

Câu 2 ***(2,0 điểm)***

a) Giải phương trình: $4\sqrt{x+3}+2\sqrt{2x+7}=(x+1)(x^2+4x+2)$.

b) Giải hệ phương trình: $\begin{cases}\sqrt{x}+\sqrt{y}+2(x+y)^2=2(2+3xy)\\ \sqrt{3x^4+6x^3y}+\sqrt{3y^4+6xy^3}=6\end{cases}$.

Câu 3 ***(0,5 điểm).*** Cho parabol $(P): y=-x^2$ và đường thẳng $d: y=2x-3$. Gọi A, B là hai giao điểm của d và (P). Tìm điểm M trên $\overset{\frown}{AB}$ của parabol (P) sao cho $\triangle MAB$ vuông tại M.

Câu 4 ***(2,0 điểm).*** Cho tam giác ABC có trực tâm H. Qua A kẻ đường thẳng song song với BH cắt CH tại E.

a) Gọi p_1, p_2 lần lượt là chu vi các tam giác EHA và ABC. Chứng minh rằng $\dfrac{EH}{AB}=\dfrac{p_1}{p_2}$

b) Qua A kẻ đường thẳng song song với CH cắt tia BH tại D. Kẻ đường trung tuyến AM của $\triangle ABC$. Chứng minh rằng $DE\perp AM$.

Câu 5 ***(2,0 điểm).*** Cho 3 đường tròn $(O),(O_1),(O_2)$ biết $(O_1),(O_2)$ tiếp xúc ngoài với nhau tại điểm I và $(O_1),(O_2)$ lần lượt tiếp xúc trong với (O) tại M_1, M_2. Tiếp tuyến của (O_1) tại I cắt (O) lần lượt tại A, A'. Đường thẳng AM_1 cắt (O_1) tại điể N_1, đường thẳng AM_2 cắt (O_2) tại điểm N_2. Chứng minh tứ giác $M_1N_1N_2M_2$ nội tiếp và $OA\perp N_2N_1$.

b) Kẻ đường kính PQ của (O) sao cho $PQ\perp AI$ (điểm P nằm trên $\overset{\frown}{AM_1}$ không chứa điểm M_2). Chứng minh rằng nếu PM_1, PM_2 không song song thì các đường thẳng AI, PM_1, QM_2 đồng quy.

Câu 6 ***(1,0 điểm).*** Cho a,b,c là ba số thực dương. Chứng minh bất đẳng thức:

$$\frac{1}{a(a^2+8bc)}+\frac{1}{b(b^2+8ac)}+\frac{1}{c(c^2+8ab)}\leq\frac{1}{3abc}.$$

Câu 7 ***(0,5 điểm) .*** Trên mặt phẳng tọa độ có 3 điểm nguyên nằm trên một đường tròn bán kính là r. Chứng minh rằng tồn tại hai điểm mà khoảng cách giữa đúng không nhỏ hơn $\sqrt[3]{r}$.

===Hết===

ĐỀ SỐ 9

Câu 1 ***(2,0 điểm)***

a) Cho biểu thức $P=\dfrac{2\sqrt{a}+\sqrt{b}}{\sqrt{ab}+2\sqrt{a}-\sqrt{b}-2}-\dfrac{2-\sqrt{ab}}{\sqrt{ab}+2\sqrt{a}+\sqrt{b}+2}$ (với $a,b\ge 0$ và $a\ne 1$).

Tìm giá trị lớn nhất của P khi $a\ne 1$ là số tự nhiên.

b) Cho m,n là hai số nguyên dương lẻ sao cho n^2-1 chia hết cho $\left|m^2-n^2+1\right|$. Chứng minh rằng $\left|m^2-n^2+1\right|$ là số chính phương.

Câu 2 ***(2,0 điểm)***

a) Giải phương trình: $2x+\dfrac{x-1}{x}=\sqrt{1-\dfrac{1}{x}}+3\sqrt{x-\dfrac{1}{x}}$.

b) Giải hệ phương trình: $\begin{cases}(x+1)\sqrt{y^2+y+2}+(y-1)\sqrt{x^2+x+1}=x+y\\ \left(x^2+x\right)\sqrt{x-y+3}=2x^2+x+y+1\end{cases}$.

Câu 3 ***(0,5 điểm).*** Cho parabol $(P): y=\dfrac{2}{3}x^2$. Lấy hai điểm thay đổi A và B trên (P) sao cho $OA\perp OB$. Chứng minh rằng hình chiếu H của O trên AB thuộc một đường tròn cố định đồng thời xác định vị trí của A và B để OH lớn nhất.

Câu 4 ***(2,0 điểm).*** Cho tứ giác lồi $ABCD$ có $\widehat{BAC}=\widehat{CAD}$ và $\widehat{ABC}=\widehat{ACD}$. Hai tia AD và BC cắt nhau tại E, hai tia AB và DC cắt nhau tại F. Chứng minh rằng

a) $AB.DE=BC.CE$.

b) $AC^2<\dfrac{1}{2}(AD.AF+AB.AE)$.

Câu 5 ***(2,0 điểm).*** Cho tam giác ABC không là tam giác cân, biết tam giác ABC ngoại tiếp đường tròn (I). Gọi D,E,F lần lượt là các tiếp điểm của BC,CA,AB với đường tròn (I). Gọi M là giao điểm của đường thẳng EF và đường thẳng BC, biết AD cắt đường tròn (I) tại điểm N (N không trùng với D), gọi K là giao điểm của AI và EF.

a) Chứng minh rằng các điểm I,D,N,K cùng thuộc một đường tròn.

b) Chứng minh MN là tiếp tuyến của đường tròn (I).

Câu 6 ***(1,0 điểm).*** Cho a,b,c là các số thực dương thỏa mãn điều kiện $a+b+c\le\dfrac{1}{4}$.

Chứng minh rằng:

$$\frac{1+4a}{1-4a}+\frac{1+4b}{1-4b}+\frac{1+4c}{1-4c}\le 6+\frac{1}{a}\left(\frac{\sqrt{b}-\sqrt{c}}{\sqrt{b}+\sqrt{c}}\right)^2+\frac{1}{b}\left(\frac{\sqrt{c}-\sqrt{a}}{\sqrt{c}+\sqrt{a}}\right)^2+\frac{1}{c}\left(\frac{\sqrt{a}-\sqrt{b}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}\right)^2.$$

Câu 7 ***(0,5 điểm).*** Một nước có 80 sân bay, mà khoảng cách giữa hai sân bay nào cũng khác nhau. Mỗi máy bay cất cánh từ một sân bay và bay đến sân bay nào gần nhất. Chứng minh rằng trên bất kỳ sân bay nào cũng không thể có quá 5 máy bay đến.

===Hết===

ĐỀ SỐ 10

Câu 1 ***(2,0 điểm)***

a) Rút gọn biểu thức $P=\sqrt[3]{a+\left(\frac{a+8}{3}\right)\sqrt{\frac{a-1}{3}}}+\sqrt[3]{a-\left(\frac{a+8}{3}\right)\sqrt{\frac{a-1}{3}}}$.

b) Tìm nghiệm nguyên dương của phương trình sau:

$$8\left(\sqrt[3]{\frac{x^3-3x+\left(x^2-1\right)\sqrt{x^2-4}}{2}}+\sqrt[3]{\frac{x^3-3x-\left(x^2-1\right)\sqrt{x^2-4}}{2}}\right)=y^2-z^2+16$$

với điều kiện $2\le y<x<10$.

Câu 2 ***(2,0 điểm)***

a) Giải phương trình: $2\left(x^2+x-1\right)^2+2x^2+2x=3+\sqrt{4x+5}$.

b) Giải hệ phương trình: $\begin{cases}\sqrt{x+y+1}+1=4(x+y)^2+\sqrt{3(x+y)}\\2019x-2y=2020\end{cases}$.

Câu 3 ***(0,5 điểm).*** Cho parabol $(P): y=\frac{1}{2}x^2$ và đường thẳng d có hệ số góc $-\frac{2}{m}$ (với $m\ne 0$) và đi qua điểm $I(0;2)$. Chứng minh rằng d cắt (P) tại hai điểm phân biệt A,B khác phía đối với Oy và $AB>4;\ y_A^2+y_B^2>8$. (Ở đây y_A,y_B lần lượt là tung độ của hai điểm A và B).

Câu 4 ***(2,0 điểm).*** Cho tam giác ABC nhọn có các đường cao AD,BE,CF cắt nhau tại H. Biết rằng $S_{AEF}=S_{BFD}=S_{CDE}$. Chứng minh rằng

a) H là tâm đường tròn nội tiếp $\triangle DEF$ b) $\triangle ABC$ là tam giác đều.

Câu 5 ***(2,0 điểm).*** Cho tam giác ABC có $\widehat{A}>\widehat{B}>\widehat{C}$ nội tiếp trong đường tròn (O), ngoại tiếp đường tròn (I). Cung nhỏ $\overset{\frown}{BC}$ có M là điểm chính giữa. N là trung điểm cạnh BC. Điểm E đối xứng với I qua N. Đường thẳng ME cắt đường tròn (O) tại điểm thứ hai Q. Lấy điểm K thuộc BQ sao cho $QK=QA$. Chứng minh rằng:

a) Điểm Q thuộc cung nhỏ AC của đường tròn (O).

b) Tứ giác $AIKB$ nội tiếp và $BQ=AQ+CQ$.

Câu 6 ***(1,0 điểm).*** Cho a,b,c là ba số thực dương thỏa mãn $ab+bc+ca=3abc.$ Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=\frac{a^2}{b(a^2+2)}+\frac{b^2}{c(b^2+2)}+\frac{c^2}{a(c^2+2)}$.

Câu 7 ***(0,5 điểm).*** Bên trong đường tròn tâm O bán kính $R=1$ có 8 điểm phân biệt. Chứng minh rằng: tồn tại ít nhất hai điểm trong số chúng mà khoảng cách giữa hai điểm này nhỏ hơn 1.

===Hết===

ĐỀ SỐ 11

Câu 1 *(2,0 điểm)*

a) Cho ba số dương x,y,z thỏa $xy+yz+zx=1$. Tính giá trị của biểu thức

$$P=x\sqrt{\frac{(1+y^2)(1+z^2)}{1+x^2}}+y\sqrt{\frac{(1+z^2)(1+x^2)}{1+y^2}}+z\sqrt{\frac{(1+x^2)(1+y^2)}{1+z^2}}.$$

b) Cho ba số tự nhiên a,b,c thỏa mãn đồng thời hai điều kiện $a-b$ là số nguyên tố và $3c^2=c(a+b)+ab$. Chứng minh rằng $8c+1$ là một số chính phương.

Câu 2 *(2,0 điểm)*

a) Giải phương trình: $32x^4-80x^3+50x^2+4x-3-4\sqrt{x-1}=0$.

b) Giải hệ phương trình: $\begin{cases} x^3+8y^3-4xy^2=1 \\ 2x^4+8y^4-2x-y=0 \end{cases}$.

Câu 3 *(0,5 điểm).* Cho parabol $(P): y=-x^2$ và đường thẳng $d: y=mx-1$. Chứng minh rằng d luôn đi qua một điểm cố định I và cắt (P) tại hai điểm A,B phân biệt khi m thay đổi. Tìm m để $\frac{IA}{IB}=4$.

Câu 4 *(2,0 điểm).* Cho hình vuông *ABCD*, có độ dài cạnh bằng *a*. *E* là một điểm di chuyển trên *CD* (*E* khác *C*, *D*). Đường thẳng *AE* cắt đường thẳng *BC* tại *F*, đường thẳng vuông góc với *AE* tại *A* cắt đường thẳng *CD* tại *K*. Chứng minh rằng

a) $\frac{1}{AE^2}+\frac{1}{AF^2}$ không đổi. b) $\cos\widehat{AKE}=\sin\widehat{EKF}.\cos\widehat{EFK}+\sin\widehat{EFK}.\cos\widehat{EKF}$.

Câu 5 *(2,0 điểm).* Cho tam giác nhọn ABC nội tiếp (O). Các đường cao AD,BE,CF cắt nhau tại H. Tiếp tuyến tại B,C của (O) cắt nhau tại G. Gọi $S=GD\cap EF$ và M là trung điểm cạnh BC. Giả sử $EF\cap BC=T, AT\cap(O)=K$.

a) Chứng minh 5 điểm A,K,F,E,H cùng nằm trên một đường tròn.

b) Chứng minh 4 điểm M,H,S,K thẳng hàng.

Câu 6 *(1,0 điểm).* Cho a,b,c là các số dương thỏa mãn $a+b+c=\frac{1}{2}$. Tính giá trị lớn nhất của

biểu thức $P=\sqrt{\frac{(a+b)(b+c)}{(a+b)(b+c)+a+c}}+\sqrt{\frac{(b+c)(a+c)}{(b+c)(a+c)+a+b}}+\sqrt{\frac{(a+c)(a+b)}{(a+c)(a+b)+b+c}}$.

Câu 7 *(0,5 điểm).* Trên bảng cho đa thức $A(x)=x^2+4x+3$. Thực hiện trò chơi sau, nếu trên bảng đã có đa thức $B(x)$ thì được phép viết lên bảng một trong hai đa thức sau:

$$C(x)=x^2A\left(\frac{1}{x}+1\right);\ D(x)=(x-1)^2A\left(\frac{1}{x-1}\right).$$

Hỏi sau một số bước ta có thể viết được đa thức $E(x)=x^2+10x+9$ hay không?

===Hết===

ĐỀ SỐ 12

Câu 1 ***(2,0 điểm)***

a) Cho các số a,b thỏa mãn điều kiện $\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}=\sqrt[3]{\dfrac{4b-1}{4}}$. Chứng minh rằng $-1\le a<0$.

b) Tìm tất cả các số nguyên tố p sao cho p^2-p+1 là lập phương của một số tự nhiên.

Câu 2 ***(2,0 điểm)***

a) Giải phương trình: $\dfrac{3x^4+9x^3+17x^2+11x+8}{3x^2+4x+5}=(x+1)\sqrt{x^2+3}$.

b) Giải hệ phương trình: $\begin{cases}\sqrt{xy+(x-y)\left(\sqrt{xy}-2\right)}+\sqrt{x}=y+\sqrt{y}\\ (x+1)\left(y+\sqrt{xy}+x(1-x)\right)=4\end{cases}$.

Câu 3 ***(0,5 điểm).*** Cho hàm số $f(x)=(-m^2+7m-14)x^2$ và các số thực

$$a=\sqrt{1}+\sqrt{3}+\sqrt{5}+\sqrt{7}+\sqrt{9} \text{ và } b=\sqrt{2}+\sqrt{4}+\sqrt{6}+\sqrt{8}+\frac{\sqrt{10}}{2}.$$

Hãy so sánh $f(a)$ và $f(b)$.

Câu 4 ***(2,0 điểm).*** Cho hình thoi $ABCD$ cạnh a, gọi R và r lần lượt là các bán kính các đường tròn ngoại tiếp các tam giác ABD và ABC. Chứng minh rằng

a) $\dfrac{1}{R^2}+\dfrac{1}{r^2}=\dfrac{4}{a^2}$

b) $S=\dfrac{8R^3r^3}{(R^2+r^2)^2}$; (Kí hiệu S là diện tích tứ giác $ABCD$).

Câu 5 ***(2,0 điểm).*** Cho tứ giác $ABCD$ nội tiếp đường tròn (O) tâm O, đường kính AD. Hai đường chéo AC và BD cắt nhau tại I. Gọi H là hình chiếu của I lên AD và M là trung điểm của ID. Đường tròn (HMD) cắt (O) tại N (N khác D). Gọi P là giao điểm của BC và HM. Chứng minh rằng

a) Tứ giác $BCMH$ nội tiếp.

b) Ba điểm P,D,N thẳng hàng.

Câu 6 ***(1,0 điểm).*** Cho $a,b,c>0$ thỏa $21ab+2bc+8ca\le 12$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=\dfrac{1}{a}+\dfrac{2}{b}+\dfrac{3}{c}$.

Câu 7 ***(0,5 điểm).*** Chứng minh rằng trong 2015 số tự nhiên liên tiếp bất kì luôn tồn tại ít nhất một số có tổng các chữ số chia hết cho 28.

===Hết===

ĐỀ SỐ 13

Câu 1 ***(2,0 điểm)***

a) Cho các số thực x, y thỏa mãn $x=\sqrt[3]{y-\sqrt{y^2+1}}+\sqrt[3]{y+\sqrt{y^2+1}}$. Tính giá trị của biểu thức

$$P=x^4+x^3y+3x^2+xy-2y^2+2019.$$

b) Cho các số nguyên a,b và số nguyên tố p thỏa mãn $\dfrac{a^2+b^2}{p}\in\mathbb{Z}$. Cho biết p là tổng của hai số chính phương. Chứng minh rằng $\dfrac{a^2+b^2}{p}$ cũng là tổng của hai số chính phương.

Câu 2 ***(2,0 điểm)***

a) Giải phương trình: $\dfrac{2}{3}\sqrt{4x+1}-9x^2+26x-\dfrac{37}{3}=0$.

b) Giải hệ phương trình: $\begin{cases}\dfrac{1}{\sqrt{1+2x^2}}+\dfrac{1}{\sqrt{1+2y^2}}=\dfrac{2}{\sqrt{1+2xy}}\\ \sqrt{x(1-2x)}+\sqrt{y(1-2y)}=\dfrac{2}{9}\end{cases}$.

Câu 3 ***(0,5 điểm).*** Cho parabol $(P): y=-x^2$ và đường thẳng d đi qua điểm $I(0;-1)$ có hệ số góc k. Chứng minh rằng với mọi k, d luôn cắt (P) tại hai điểm phân biệt A,B sao cho $|x_1-x_2|\ge 2$ và $\triangle OAB$ vuông.

Câu 4 ***(2,0 điểm).*** Cho hình vuông *ABCD* có *AC* cắt *BD* tại *O*. *M* là điểm bất kỳ thuộc cạnh *BC* (*M* khác *B, C*). Tia AM cắt đường thẳng CD tại N. Trên cạnh *AB* lấy điểm *E* sao cho $BE=CM$.

a) Chứng minh rằng $\triangle OEM$ vuông cân và *ME // BN*.

b) Từ *C* kẻ $CH\perp BN$ ($H\in BN$). Chứng minh rằng ba điểm *O, M, H* thẳng hàng.

Câu 5 ***(2,0 điểm).*** Cho tam giác ABC nhọn nội tiếp đường tròn (O). có AD, BE, CF là ba đường cao. Đường thẳng EF cắt BC tại G, đường thẳng AG cắt lại đường tròn (O) tại điểm M.

a) Chứng minh rằng bốn điểm A, M, E, F cùng nằm trên một đường tròn.

b) Gọi N là trung điểm của cạnh BC và H là trực tâm tam giác ABC. Chứng minh rằng $GH\perp AN$.

Câu 6 ***(1,0 điểm).*** Cho x, y, z là các số thực dương thỏa mãn $x^2+y^2+z^2+(x+y+z)^2\le 4$.

Chứng minh rằng $\dfrac{xy+1}{(x+y)^2}+\dfrac{yz+1}{(y+z)^2}+\dfrac{zx+1}{(z+x)^2}\ge 3$.

Câu 7 ***(0,5 điểm).*** Cho A là tập con gồm 6 phần tử của tập $S=\{0;1;2;...;14\}$. Chứng minh rằng tồn tại hai tập con B và C của A (B,C khác nhau và khác rỗng) sao cho tổng các phần tử của B bằng tổng các phần tử của C.

===Hết===

ĐỀ SỐ 14

Câu 1 ***(2,0 điểm)***

a) Cho n là số tự nhiên và $n \ge 1$. Chứng minh rằng

$$\frac{1}{\sqrt{1^3}+\sqrt{1}}+\frac{1}{\sqrt{2^3}+\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3^3}+\sqrt{3}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{n^3}+\sqrt{n}}<2.$$

b) Cho x, y là các số nguyên sao cho $x^2-2xy-y$ và $xy-2y^2-x$ đều chia hết cho 5. Chứng minh rằng $2x^2+y^2+2x+y$ cũng chia hết cho 5.

Câu 2 ***(2,0 điểm)***

a) Giải phương trình: $\sqrt{1+\sqrt{2x-x^2}}+\sqrt{1-\sqrt{2x-x^2}}=2(x-1)^4\left(2x^2-4x+1\right)$.

b) Giải hệ phương trình: $\begin{cases} \dfrac{2xy+y\sqrt{x^2-y^2}}{14}=\sqrt{\dfrac{x+y}{2}}+\sqrt{\dfrac{x-y}{2}} \\ \sqrt{\left(\dfrac{x+y}{2}\right)^3}+\sqrt{\left(\dfrac{x-y}{2}\right)^3}=9 \end{cases}$.

Câu 3 ***(0,5 điểm).*** Cho parabol $(P): y=2x^2$ và đường thẳng $d: y=-2mx+m+1$. Tìm m để d cắt (P) tại hai điểm phân biệt có hoành độ x_1, x_2 sao cho biểu thức

$$P=-\frac{1}{(2x_1-1)^2}-\frac{1}{(2x_2-1)^2}$$ đạt giá trị lớn nhất.

Câu 4 ***(2,0 điểm).*** Cho hình bình hành *ABCD* có đường chéo *AC* lớn hơn đường chéo *BD*. Gọi *E, F* lần lượt là hình chiếu của *B* và *D* xuống đường thẳng *AC*. Gọi *H* và *K* lần lượt là hình chiếu của *C* xuống đường thẳng *AB* và *AD*.

a) Chứng minh tứ giác *BEDF* là hình bình hành và $CH.CD=CB.CK$.

b) Chứng minh rằng $AB.AH+AD.AK=AC^2$.

Câu 5 ***(2,0 điểm).*** Cho đường tròn tâm O đường kính $AB=2R$ và C là điểm chính giữa $\overset{\frown}{AB}$. Lấy điểm M tùy ý trên $\overset{\frown}{BC}$ (M khác B). Gọi N là giao điểm của hai tia OC và BM. Gọi H, I lần lượt là trung điểm của các đoạn thẳng AO, AM; K là giao điểm của các đường thẳng BM và HI.

a) Chứng minh rằng A, H, K, N cùng nằm trên một đường tròn.

b) Xác định vị trí của điểm M trên cung $\overset{\frown}{BC}$ (M khác B) sao cho $AK=\dfrac{R\sqrt{10}}{2}$.

Câu 6 ***(1,0 điểm).*** Cho a,b,c là các số thực dương sao cho $ab+bc+ca=1$. Chứng minh rằng

$$\sqrt[3]{\frac{1}{a}+6b}+\sqrt[3]{\frac{1}{b}+6c}+\sqrt[3]{\frac{1}{c}+6a}\le\frac{1}{abc}.$$

Câu 7 ***(0,5 điểm)***. Giả sử A là tập con của các số tự nhiên $\mathbb{N}$. Tập A có phần tử nhỏ nhất là 1, phần tử lớn nhất là 100 và mỗi $x \in A$ ($x \ne 1$), luôn tồn tại $a, b \in A$ sao cho $x=a+b$ (a có thể bằng b). Hãy tìm một tập A có số phần tử nhỏ nhất.

===Hết===

ĐỀ SỐ 15

Câu 1 ***(2,0 điểm)***

a) Cho n là số tự nhiên và $n \geq 1$. Chứng minh rằng

$$\frac{1}{1^2.3.\sqrt{2}}+\frac{1}{2^2.4.\sqrt{3}}+\frac{1}{3^2.5.\sqrt{4}}+...+\frac{1}{n^2\left(n+2\right)\sqrt{n+1}}<\frac{1}{2\sqrt{2}}.$$

b) Tìm bộ số nguyên dương $\left(m;n\right)$ sao cho $p=m^2+n^2$ là số nguyên tố và m^3+n^3-4 chia hết cho p.

Câu 2 ***(2,0 điểm)***

a) Giải phương trình: $\dfrac{\left(x-1\right)^4}{\left(x^2-3\right)^2}+\left(x^2-3\right)^4+\dfrac{1}{\left(x-1\right)^2}=3x^2-2x-5$.

b) Giải hệ phương trình: $\begin{cases}\dfrac{6x}{y}-2=\sqrt{3x-y}+3y\\ 2\sqrt{3x+\sqrt{3x-y}}=6x+3y-4\end{cases}$.

Câu 3 ***(0,5 điểm).*** Lấy các điểm A và B thuộc parabol $(P): y=x^2$ với $x_A<0$, $x_B>0$. Hãy xác định tọa độ các điểm A,B sao cho $\triangle OAB$ đều.

Câu 4 ***(2,0 điểm)***

Cho hình thang *ABCD* (*AB* // *CD*, *AB* < *CD*). Qua *A* vẽ đường thẳng song song với *BC* cắt *BD* ở *E* và cắt *CD* ở *K*. Qua *B* kẻ đường thẳng song song với *AD* cắt *AC* ở *F* và cắt *CD* ở *I*. Chứng minh rằng

a) $DK=CI$ và $EF // CD$ b) $AB^2=CD.EF$.

Câu 5 ***(2,0 điểm)***

Cho tam giác ABC có ba góc nhọn nội tiếp đường tròn (O) và có trực tâm là H. Giả sử M là một điểm trên $\overset{\frown}{BC}$ không chứa A (M khác B,C). Gọi N,P lần lượt là điểm đối xứng của M qua các đường thẳng AB,AC.

a) Chứng minh tứ giác $AHCP$ nội tiếp và ba điểm N,H,P thẳng hàng.

b) Tìm vị trí của M để đoạn thẳng NP lớn nhất.

Câu 6 ***(1,0 điểm).*** Cho các số dương x, y, z thỏa mãn điều kiện $xy+yz+zx=xyz$.

Chứng minh rằng $\sqrt{x+yz}+\sqrt{y+zx}+\sqrt{z+xy}\geq\sqrt{xyz}+\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z}$.

Câu 7 ***(0,5 điểm).*** Xét tập X gồm 700 số nguyên dương lớn hơn 1, đôi một khác nhau và mỗi

số nhỏ hơn 2017. Chứng minh rằng trong tập hợp X luôn tìm được hai phần tử x,y sao cho $x-y$ thuộc tập $E=\{3;6;9\}$.

===Hết===

ĐỀ SỐ 16

Câu 1 ***(2,0 điểm)***

a) Cho $a \ge 0$ và $a \ne 1$. Rút gọn biểu thức

$$P = \sqrt{6-4\sqrt{2}}.\sqrt[3]{20+14\sqrt{2}} + \sqrt[3]{(a+3)\sqrt{a}-3a-1} : \left[\frac{a-1}{2\left(\sqrt{a}-1\right)} - 1\right].$$

b) Giả sử số nguyên dương n có tất cả k ước số dương là $d_1, d_2, ..., d_k$. Chứng minh rằng nếu

$d_1 + d_2 + ... + d_k + k = 2n+1$ thì $\frac{n}{2}$ là số chính phương.

Câu 2 ***(2,0 điểm)***

a) Giải phương trình: $2\sqrt[4]{27x^2+24x+\frac{28}{3}} = 1 + \sqrt{\frac{27}{2}x+6}$.

b) Giải hệ phương trình: $\begin{cases} x^2+y^2+\dfrac{8xy}{x+y} = 16 \\ \dfrac{x^2}{8y}+\dfrac{2x}{3} = \sqrt{\dfrac{x^3}{3y}+\dfrac{x^2}{4}} - \dfrac{y}{2} \end{cases}$.

Câu 3 ***(0,5 điểm).*** Cho đường thẳng $d: y = ax+b$ đi qua điểm $M(2;7)$. Tìm các số nguyên a,b sao cho đường thẳng d cắt trục hoành tại một điểm có hoành độ là một số nguyên âm, cắt trục tung tại một điểm có hoành độ là một số nguyên dương.

Câu 4 ***(2,0 điểm).*** Cho tam giác *ABC* vuông tại *A*. Lấy một điểm *M* bất kỳ trên cạnh *AC*. Từ *C* vẽ một đường thẳng vuông góc với tia *BM*, đường thẳng này cắt tia *BM* tại *D*, cắt tia *BA* tại *E*.

a) Chứng minh rằng *EA.EB = ED.EC* và khi điểm *M* di chuyển trên cạnh *AC* thì tổng $BM.BD + CM.CA$ có giá trị không đổi.

b) Kẻ $DH \perp BC$ $\left(H \in BC\right)$. Gọi *P, Q* lần lượt là trung điểm của các đoạn thẳng *BH, DH*. Chứng minh rằng $CQ \perp PD$.

Câu 5 ***(2,0 điểm).*** Cho đường tròn tâm O và dây AB cố định (O không thuộc AB). P là điểm di động trên đoạn AB (P khác A, B). Qua A, P vẽ đường tròn tâm C tiếp xúc với (O) tại A. Qua B, P vẽ đường tròn tâm D tiếp xúc với (O) tại B. Hai đường tròn (C) và (D) cắt nhau tại $N \ne P$.

a) Chứng minh rằng $\widehat{ANP} = \widehat{BNP}$ và $\widehat{PNO} = 90^0$.

b) Chứng minh rằng khi P di động thì N luôn nằm trên một cung tròn cố định.

Câu 6 ***(1,0 điểm).*** Cho các số thực dương a,b,c thỏa mãn $a^2+b^2+c^2+\left(a+b+c\right)^2 \le 4$.

Chứng minh rằng $\frac{ab+1}{\left(a+b\right)^2} + \frac{bc+1}{\left(b+c\right)^2} + \frac{ca+1}{\left(c+a\right)^2} \ge 3$.

Câu 7 ***(0,5 điểm).*** Mỗi điểm của mặt phẳng được tô bằng một trong ba màu xanh, vàng hoặc đỏ. Chứng minh rằng luôn tìm được hai điểm cùng màu có khoảng cách bằng 1 cm.

===Hết===

ĐỀ SỐ 17

Câu 1 ***(2,0 điểm)***

a) Cho các số thực a,b,c,x,y,z sao cho $x,y,z\neq 0$, $ax^3=by^3=cz^3$ và $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=1$. Chứng minh rằng $\sqrt[3]{ax^2+by^2+cz^2}=\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}+\sqrt[3]{c}$.

b) Tìm tất cả các bộ ba số nguyên (a,b,c) sao cho số $\frac{(a-b)(b-c)(c-a)}{2}+2$ là một lũy thừa của 2018^{2019}. (*Một lũy thừa của* 2018^{2019} *là một số có dạng* 2018^{2019n} *với* n *là một số nguyên không âm*).

Câu 2 ***(2,0 điểm)***

a) Giải phương trình: $x^2+2\sqrt{2x+7}=2\sqrt{-2x+3}+5$.

b) Giải hệ phương trình: $\begin{cases}\sqrt{4x^2-6xy+3y^2}+\sqrt{2xy-y^2}=4\\ x+\sqrt{2x-y}+3\sqrt{y}=y+4\end{cases}$.

Câu 3 ***(0,5 điểm)*** . Cho đường thẳng $d: y=(m-2)x-m+5$. Tìm m để khoảng cách từ O đến đường thẳng d lớn nhất.

Câu 4 ***(2,0 điểm)***

Cho hình vuông *ABCD* có cạnh bằng a. Trên cạnh *AD* lấy điểm *M* sao cho $AM=3MD$. Kẻ tia *Bx* cắt cạnh *CD* tại *I* sao cho $\widehat{ABM}=\widehat{MBI}$. Kẻ tia phân giác của $\widehat{CBI}$, tia này cắt cạnh *CD* tại *N*.

a) So sánh *MN* với $AM+NC$.

b) Tính diện tích tam giác *BMN* theo *a*.

Câu 5 ***(2,0 điểm)***

Từ điểm A nằm ngoài đường tròn (O). Vẽ hai tiếp tuyến AB,AC (B,C là hai tiếp điểm) và một cát tuyến AEF đến (O) sao cho (AEF nằm giữa 2 tia AO,AB, $F,E\in(O)$ và $\widehat{BAF}<\widehat{FAC}$). Vẽ đường thẳng qua E vuông góc với OB cắt BC tại M, cắt BF tại N. Vẽ $OK\perp EF$. Chứng minh rằng:

a) Tứ giác $EMKC$ nội tiếp.

b) Đường thẳng FM đi qua trung điểm của AB.

Câu 6 ***(1,0 điểm).*** Cho a,b,c là ba số thực không âm thỏa mãn $\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}\geq 1$. Chứng minh rằng $a^2+b^2+c^2+7(ab+bc+ca)\geq\sqrt{8(a+b)(b+c)(c+a)}$.

Câu 7 ***(0,5 điểm).*** Cho đường gấp khúc khép kín có độ dài bằng 1. Chứng minh rằng luôn tồn tại một hình tròn có bán kính $R=\frac{1}{4}$ chứa toàn bộ đường gấp khúc đó.

===Hết===

ĐỀ SỐ 18

Câu 1 ***(2,0 điểm)***

a) Cho $x, y > 0$ sao cho $x + y = 1 - xy$. Tính giá trị của biểu thức

$$P = 2x\sqrt{\frac{1+y^2}{1+x^2}} + 2y\sqrt{\frac{1+x^2}{1+y^2}} + \sqrt{(1+x^2)(1+y^2)}.$$

b) Tìm tất cả các số nguyên dương k sao cho phương trình $x^2 + y^2 + x + y = kxy$ có nghiệm nguyên dương.

Câu 2 ***(2,0 điểm)***

a) Giải phương trình: $\sqrt{8-x^2} + \sqrt{\dfrac{x^2-2}{2x^2}} = 5 - \dfrac{1+x^2}{x}$.

b) Giải hệ phương trình: $\begin{cases} x^2 + y^2 + x + y = \dfrac{21}{8} \\ \left(x + \sqrt{x^2+1}\right)\left(y + \sqrt{y^2+1}\right) = 4 \end{cases}$.

Câu 3 ***(0,5 điểm).*** Cho parabol $(P): y = \dfrac{1}{2}x^2$ và đường thẳng $d: mx - y + 1 = 0$. Tìm m để d cắt (P) tại hai điểm phân biệt A, B sao cho diện tích tam giác AOB bằng $\dfrac{3}{2}$.

Câu 4 ***(2,0 điểm).*** Cho tam giác ABC với các đỉnh A, B, C và các cạnh đối diện với các đỉnh tương ứng là a, b, c.

a) Tính diện tích tam giác ABC theo a, b, c.

b) Chứng minh rằng $a^2 + b^2 + c^2 \geq 4\sqrt{3}\, S$.

Câu 5 ***(2,0 điểm).*** Cho tam giác ABC nhọn nội tiếp đường tròn (O) với $AB < AC$. Gọi M là trung điểm BC, AM cắt (O) tại điểm D khác A. Đường tròn ngoại tiếp tam giác MDC cắt đường thẳng AC tại E khác C. Đường tròn ngoại tiếp tam giác MDB cắt đường thẳng AB tại F khác B.

a) Chứng minh rằng $\triangle BDF \sim \triangle CDE$; ba điểm E, M, F thẳng hàng và $OA \perp EF$.

b) Phân giác của góc $\widehat{BAC}$ cắt EF tại điểm N. Phân giác của các góc $\widehat{CEN}$ và $\widehat{BFN}$ lần lượt cắt CN, BN tại P và Q. Chứng minh rằng PQ song song với BC.

Câu 6 ***(1,0 điểm).*** Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn điều kiện $ab + bc + ca \leq 3abc$. Chứng minh rằng $\sqrt{2}\left(\sqrt{a+b} + \sqrt{b+c} + \sqrt{c+a}\right) \geq \sqrt{\dfrac{a^2+b^2}{a+b}} + \sqrt{\dfrac{b^2+c^2}{b+c}} + \sqrt{\dfrac{c^2+a^2}{c+a}} + 3$.

Câu 7 ***(0,5 điểm)***. Trên một hòn đảo có 13 con tắc kè xanh, 15 con tắc kè đỏ và 17 con tắc kè vàng. Khi hai con tắc kè khác màu gặp nhau, chúng đổi sang màu còn lại. Liệu có thể đến một lúc nào đó tất cả các con tắc kè có cùng màu hay không ?

===Hết===

ĐỀ SỐ 19

Câu 1 ***(2,0 điểm)***

a) Cho các số thực x, y, z đôi một khác nhau thỏa mãn

$$(y-z)\sqrt[3]{1-x^3}+(z-x)\sqrt[3]{1-y^3}+(x-y)\sqrt[3]{1-z^3}=0.$$

Chứng minh rằng $(1-x^3)(1-y^3)(1-z^3)=(1-xyz)^3$.

b) Tìm nghiệm nguyên dương của phương trình $\dfrac{x^2-y}{8x-y^2}=\dfrac{y}{x}$.

Câu 2 ***(2,0 điểm)***

a) Giải phương trình: $x+1+\sqrt{x^2-4x+1}=3\sqrt{x}$.

b) Giải hệ phương trình: $\begin{cases} 2x^2+\sqrt{2-x}+\sqrt{y-1}-34=2xy+x \\ 2y^2+\sqrt{2-x}+\sqrt{y-1}-34=-xy+2y \end{cases}$.

Câu 3 ***(0,5 điểm).*** Cho hàm số $y=|2x-1|$ có đồ thị (C). Tìm m để đường thẳng $d: y=x+m$ cắt (C) tại hai điểm phân biệt A và B sao cho đoạn thẳng AB có độ dài bằng 4.

Câu 4 ***(2,0 điểm).*** Cho tam giác nhọn ABC ($AB<AC$) có đường cao AH sao cho $AH=HC$. Trên AH lấy một điểm I sao cho $HI=BH$. Gọi P và Q lần lượt là trung điểm của BI và AC. Gọi N và M lần lượt là hình chiếu của H trên AB và IC; K là giao điểm của đường thẳng CI với AB; D là giao điểm của đường thẳng BI với AC.

a) Chứng minh I là trực tâm của tam giác ABC.

b) Chứng minh tứ giác $HNKM$ là hình vuông và bốn điểm N, P, M, Q thẳng hàng.

Câu 5 ***(2,0 điểm).*** Cho đường tròn (O) đường kính $AB=2AC$, điểm C thuộc đường tròn $(C\neq A, C\neq B)$. Trên nửa mặt phẳng bờ AB chứa điểm C, kẻ tia Ax tiếp xúc với đường tròn (O). Gọi M là điểm chính giữa cung nhỏ AC. Tia BC cắt Ax tại Q, tia AM cắt BC tại N.

a) Chứng minh các tam giác BAN và MCN cân.

b) Khi $MB=MQ$, tính BC theo R.

Câu 6 ***(1,0 điểm).*** Cho các số thực không âm a, b, c thoả mãn $a^2+b^2+c^2=2$.

Chứng minh bất đẳng thức $a^3+b^3+c^3+3abc\geq\dfrac{8\max\left\{a^2b^2;b^2c^2;c^2a^2\right\}}{(a+b+c)^2}$.

Câu 7 ***(0,5 điểm).*** Cho ba đống sỏi khác nhau. Sisyphus thực hiện di chuyển 1 viên sỏi từ 1 trong ba đống sỏi sang 1 trong 2 đống sỏi còn lại. Mỗi lần chuyển sỏi, Sisyphus nhận được từ Zeus một số tiền bằng hiệu số giữa số sỏi của đống sỏi lấy đi và đống sỏi nhận thêm trước khi di chuyển. Nếu số chênh lệch này âm thì Sisyphus cũng phải trả cho Zeus số tiền chênh lệch đó. Sau một số bước thực hiện thì số sỏi mỗi đống sẽ trở về như ban đầu. Hỏi khi đó số tiền tối đa mà Sisyphus nhận được là bao nhiêu ?

===Hết===

ĐỀ SỐ 20

Câu 1 ***(2,0 điểm).***

a) Cho biểu thức $P=\left(\dfrac{10x+4}{5\sqrt{5x^3}-8}-\dfrac{\sqrt{5x}}{5x+2\sqrt{5x}+4}\right).\left(\dfrac{1+5\sqrt{5x^3}}{1+\sqrt{5x}}-\sqrt{5x}\right).\left(\dfrac{6\sqrt{5x}-3}{\sqrt{5x}-1}-6\right)$.

Rút gọn biểu thức P và tìm số nguyên $x\ge 11$ để $P>\dfrac{7}{2}$.

b) Tìm các số nguyên x,y thỏa mãn $x^4+y=x^3+y^2$.

Câu 2 ***(2,0 điểm)***

a) Giải phương trình: $x^3+(3x^2-4x-4)\sqrt{x+1}=0$.

b) Giải hệ phương trình: $\begin{cases}(x^4+1)(y^4+1)=4xy\\ \sqrt[3]{x-1}-\sqrt{y-1}=1-x^3\end{cases}$.

Câu 3 ***(0,5 điểm).*** Cho parabol $(P): y=\dfrac{1}{2}x^2$ và đường thẳng $d: y=(m+1)x-m^2-\dfrac{1}{2}$ (m là tham số). Tìm m thì đường thẳng d cắt Parabol (P) tại hai điểm $A(x_1;y_1),B(x_2;y_2)$ sao cho biểu thức $T=y_1+y_2-x_1x_2$ đạt giá trị nhỏ nhất.

Câu 4 ***(2,0 điểm).*** Cho hình thang $ABCD$ ($AB\ //\ CD,\ AB<CD$). Gọi K,M lần lượt là trung điểm của BD, AC. Đường thẳng qua K và vuông góc với AD cắt đường thẳng qua M và vuông góc với BC tại Q. Chứng minh rằng

a) $KM\ //\ AB$ b) $QC=QD$.

Câu 5 ***(2,0 điểm).*** Cho hình vuông $ABCD$ tâm O, cạnh a. M là điểm di động trên đoạn OB (M không trùng với O,B). Vẽ đường tròn tâm I đi qua M và tiếp xúc với BC tại B, vẽ đường tròn tâm J đi qua M và tiếp xúc với CD tại D. Đường tròn (I) và đường tròn (J) cắt nhau tại điểm thứ hai là N.

a) Chứng minh rằng 5 điểm $A,\ N,\ B,\ C,\ D$ cùng thuộc một đường tròn. Từ đó suy ra 3 điểm

C,M,N thẳng hàng.

b) Tính OM theo a để tích $NA.NB.NC.ND$ lớn nhất.

Câu 6 ***(1,0 điểm).*** Cho $x,y,z>0$ thỏa $\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z}=1$. Chứng minh rằng:

$$\frac{x^2+yz}{\sqrt{2x^2(y+z)}}+\frac{y^2+zx}{\sqrt{2y^2(z+x)}}+\frac{z^2+xy}{\sqrt{2z^2(x+y)}}\ge 1.$$

Câu 7 ***(0,5 điểm).*** Một quân cờ di chuyển trên bàn cờ $n\times n$ theo một trong 3 cách: đi lên một ô, sang bên phải một ô, đi xuống về bên trái một ô. Hỏi quân cờ có thể đi qua tất cả các ô, mỗi ô đúng một lần và quay lại ô kề bên phải ô xuất phát được không ?

===Hết===

ĐỀ SỐ 21

Câu 1 ***(2,0 điểm)***

a) Chứng minh rằng biểu thức sau nhận giá trị nguyên dương với mọi giá trị nguyên dương của n

$$P=\left(\sqrt{2n^2+2n+1}+\sqrt{2n^2-2n+1}\right)\sqrt{4n^2+2-2\sqrt{4n^4+1}}.$$

b) Tìm tất cả các số tự nhiên $(x;y)$ thỏa mãn $2^x.x^2=9y^2+6y+16$.

Câu 2 ***(2,0 điểm)***

a) Giải phương trình: $2\left(\sqrt{2(x+2)}+2\sqrt{2-x}\right)=\sqrt{9x^2+16}$.

b) Giải hệ phương trình: $\begin{cases} xy+\sqrt{2\left(x^4+y^4\right)}=1 \\ x^{2019}y^{2023}+x^{2023}y^{2019}=\dfrac{2}{3^{2021}} \end{cases}$.

Câu 3 ***(0,5 điểm).*** Trong mặt phẳng Oxy, cho parabol $(P): y=x^2$ và đường thẳng $d: y=-2mx-4m$. Tìm tất cả các giá trị của m để đường thẳng d cắt (P) tại hai điểm phân biệt có hoành độ x_1, x_2 sao cho $|x_1|+|x_2|=3$.

Câu 4 ***(2,0 điểm).*** Cho hình chữ nhật $ABCD$ có $AB=a, AD=b$. Gọi H là hình chiếu của A lên BD. Gọi E và F lần lượt là các hình chiếu của H lên BC và CD, gọi M là giao điểm của CH và AD. Chứng minh:

a) $HE=\dfrac{a^3}{a^2+b^2}$ b) $CM=\dfrac{\sqrt{a^6+b^6}}{a^2}$.

Câu 5 ***(2,0 điểm).*** Cho đường tròn (O) đường kính AB, qua A và B lần lượt vẽ các tiếp tuyến d_1 và d_2 với (O). Từ điểm M bất kỳ trên (O) vẽ tiếp tuyến với đường tròn cắt d_1 tại C và cắt d_2 tại D. Đường tròn đường kính CD cắt đường tròn (O) tại E và F (E thuộc cung $\overset{\frown}{AM}$), gọi I là giao điểm của AD và BC.

a) Chứng minh AB là tiếp tuyến của đường tròn đường kính CD.

b) Chứng minh MI vuông góc với AB và ba điểm E, I, F thẳng hàng.

Câu 6 ***(1,0 điểm).*** Cho $a,b,c>0$ sao cho $a+b+c\ge 9$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$Q=2\sqrt{a^2+\frac{b^2}{3}+\frac{c^2}{5}}+3\sqrt{\frac{1}{a}+\frac{9}{b}+\frac{25}{c}}.$$

Câu 7 ***(0,5 điểm).*** Trong 100 số tự nhiên từ 1 đến 100, hãy chọn n số ($n\ge 2$) sao cho 2 số phân biệt bất kì được chọn có tổng chia hết cho 6. Hỏi có thể chọn n số thỏa mãn điều kiện trên với n lớn nhất là bao nhiêu ?

===Hết===

ĐỀ SỐ 22

Câu 1 ***(2,0 điểm)***

a) Cho $a=\sqrt{2}$; $b=\sqrt[3]{2}$. Chứng minh rằng $\frac{1}{a-b}-\frac{1}{b}=a+b+\frac{a}{b}+\frac{b}{a}+1$.

b) Tìm tất cả bộ ba số nguyên tố $(a;b;c)$ thỏa mãn $a<b<c,\ bc-1\vdots a,\ ca-1\vdots b,\ ab-1\vdots c$.

Câu 2 ***(2,0 điểm)***

a) Giải phương trình: $\sqrt{5x^2+6x+5}=\frac{64x^3+4x}{5x^2+6x+6}$.

b) Giải hệ phương trình: $\begin{cases} x^2+2y-4x=0 \\ 4x^2-4xy^2+y^4-2y+4=0 \end{cases}$.

Câu 3 ***(0,5 điểm).*** Trong mặt phẳng Oxy, cho parabol $(P): y=x^2$ và hai đường thẳng $d: y=m$; $d': y=m^2$ (với $0<m<1$). Đường thẳng d cắt (P) tại hai điểm phân biệt A, B và đường thẳng d' cắt (P) tại hai điểm phân biệt C, D (với hoành độ A và D là các số âm). Tìm m sao cho diện tích hình thang $ABCD$ gấp 9 lần diện tích tam giác OCD.

Câu 4 ***(2,0 điểm).*** Cho hình bình hành $ABCD$, lấy điểm M trên BD sao cho $MB \neq MD$. Đường thẳng qua M và song song với AB cắt AD và BC lần lượt tại E và F. Đường thẳng qua M và song song với AD cắt AB và CD lần lượt tại K và H.

a) Chứng minh rằng $KF \ // \ EH$ và các đường thẳng $EK,\ HF,\ BD$ đồng quy.

b) Chứng minh rằng $S_{MKAE}=S_{MHCF}$.

Câu 5 ***(2,0 điểm).*** Cho AB là một đường kính cố định của đường tròn (O). Qua điểm A vẽ đường thẳng d vuông góc với AB. Từ một điểm E bất kì trên đường thẳng d, vẽ tiếp tuyến với đường tròn (O) (C là tiếp điểm, C khác A). Vẽ đường tròn (K) đi qua C và tiếp xúc với đường thẳng d tại E, vẽ đường kính EF của đường tròn (K). Gọi M là trung điểm của OE. Chứng minh rằng:

a) Điểm M thuộc đường tròn (K).

b) Đường thẳng đi qua F và vuông góc với BE luôn đi qua một điểm cố định khi E thay đổi trên đường thẳng d.

Câu 6 ***(1,0 điểm).*** Cho các số dương x, y. Tính giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P=\frac{2}{\sqrt{(2x+y)^3+1}-1}+\frac{2}{\sqrt{(x+2y)^3+1}-1}+\frac{(2x+y)(x+2y)}{4}-\frac{8}{3(x+y)}.$$

Câu 7 ***(0,5 điểm).*** Trên bảng ban đầu ghi số 2 và số 4. Ta thực hiện viết thêm các số lên bảng như sau: trên đã đã có 2 số, giả sử là a,b ($a \neq b$), ta viết thêm lên bảng số có giá trị là $a+b+ab$. Hỏi với cách thực hiện như vậy, trên bảng có thể xuất hiện số 2016 được không ? Giải thích.

===Hết===

ĐỀ SỐ 23

Câu 1 ***(2,0 điểm).***

a) Cho biểu thức $P=\left[2\sqrt{a}-\sqrt{b}-\dfrac{2\sqrt{b}\left(2\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}\right]\left[\dfrac{3}{2\sqrt{a}-\sqrt{b}}+\dfrac{6\sqrt{b}+4}{a-\sqrt{ab}+\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)^2}\right]$

(với a,b là các số nguyên dương, $a,b\le 9, a\ne b, b\ne 4a$).

Rút gọn P và tìm $n=\overline{ab}$ (n là số có hai chữ số a,b và $a\ne 0$) để P đạt giá trị lớn nhất.

b) Tìm tất cả các số tự nhiên n thỏa mãn $2n+1$, $3n+1$ là các số chính phương và $2n+9$ là số nguyên tố.

Câu 2 ***(2,0 điểm)***

a) Giải phương trình: $\sqrt{3x-5}+\sqrt{7-3x}=9x^2-36x+38$.

b) Giải hệ phương trình: $\begin{cases} x+y=1 \\ \left(x^2+\dfrac{1}{4y^2}\right)\left(y^2+\dfrac{1}{4x^2}\right)=\dfrac{25}{16} \end{cases}\cdot$

Câu 3 ***(2,0 điểm).*** Trong mặt phẳng Oxy, cho parabol $(P): y=\dfrac{1}{4}x^2$. Giả sử hai đường thẳng đi qua $I(0;1)$ cắt (P) ở A_1,B_1 và A_2,B_2 tương ứng. Chứng minh rằng

$\dfrac{1}{IA_1}+\dfrac{1}{IB_1}=\dfrac{1}{IA_2}+\dfrac{1}{IB_2}=1$ và $\dfrac{1}{\sqrt{IA_1.IA_2}}+\dfrac{1}{\sqrt{IB_1.IB_2}}\le 1$.

Câu 4 ***(2,0 điểm).*** Cho hình thoi $ABCD$ có cạnh $AB=a, \widehat{A}=60^0$. Một đường thẳng bất kì đi qua C cắt tia đối của tia BA và DA theo thứ tự tại M và N.

a) Chứng minh rằng tích $BM.DN$ có giá trị không đổi.

b) Gọi K là giao điểm của BN và DM. Tính số đo $\widehat{BKD}$.

Câu 5 ***(2,0 điểm).*** Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O) đường kính BC. Kẻ đường cao AH của $\triangle ABC$. Cho biết $BC=20cm, \dfrac{AH}{AC}=\dfrac{3}{4}$.

a) Tính độ dài cạnh AB và AC.

b) Đường tròn đường kính AH cắt đường tròn (O), AB, AC lần lượt tại M, D, E. Đường thẳng DE cắt đường thẳng BC tại K. Chứng minh ba điểm A, M, K thẳng hàng và bốn điểm B, D, E, C cùng nằm trên một đường tròn.

Câu 6 ***(1,0 điểm).*** Cho ba số dương a,b,c thỏa mãn $abc=2$. Chứng minh rằng

$$a^3+b^3+c^3\ge a\sqrt{b+c}+b\sqrt{a+c}+c\sqrt{a+b}.$$

Câu 7 ***(0,5 điểm).*** Đặt tùy ý 2018 tấm bìa hình vuông cạnh bằng 1 nằm trong một hình vuông lớn có cạnh bằng 131. Chứng minh rằng bên trong hình vuông lớn, ta luôn đặt được một hình tròn có bán kính bằng 1 sao cho hình tròn trên không có điểm chung với bất cứ tấm bìa hình vuông nào.

===Hết===

ĐỀ SỐ 24

Câu 1 ***(2,0 điểm)***

a) Chứng minh rằng số $x_0=\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}-\sqrt{6-3\sqrt{2+\sqrt{3}}}$ là một nghiệm của phương trình $x^4-16x^2+32=0$.

b) Cho $\triangle ABC$ có $\widehat{A}=\widehat{B}+2\widehat{C}$ và độ dài ba cạnh là ba số tự nhiên liên tiếp. Tính độ dài các cạnh của $\triangle ABC$.

Câu 2 ***(2,0 điểm)***

a) Giải phương trình: $\dfrac{4\sqrt{x}}{4x-8\sqrt{x}+7}+\dfrac{3\sqrt{x}}{4x-10\sqrt{x}+7}=1$.

b) Giải hệ phương trình: $\begin{cases} x+6\sqrt{xy}=y+6 \\ x+\dfrac{6\left(x^3+y^3\right)}{x^2+xy+y^2}-\sqrt{2\left(x^2+y^2\right)}=3 \end{cases}$.

Câu 3 ***(0,5 điểm).*** Trong mặt phẳng Oxy, cho đường thẳng $d: y=x+8$ và $(P): y=x^2$. Xác định độ dài cạnh hình vuông $ABCD$ biết hai đỉnh A,B thuộc đường thẳng d còn hai đỉnh C,D thuộc parabol (P).

Câu 4 ***(2,0 điểm).*** Cho hình vuông $ABCD$ và tứ giác $MNPQ$ có bốn đỉnh thuộc bốn cạnh AB,BC,CD,DA của hình vuông.

a) Chứng minh rằng $S_{ABCD}\le\dfrac{AC}{2}\left(MN+NP+PQ+QM\right)$.

b) Xác định vị trí của $M,\ N,\ P,\ Q$ để chu vi tứ giác $MNPQ$ nhỏ nhất.

Câu 5 ***(2,0 điểm).*** Cho tam giác nhọn ABC có các đường cao AD,BE,CF cắt nhau tại điểm H. Đường thẳng EF cắt nhau tại điểm M. Gọi O là trung điểm BC. Giả sử các đường tròn ngoại tiếp các tam giác OBF,OCE cắt nhau tại giao điểm thứ 2 là P.

a) Chứng minh các tứ giác $EFPH$, $BCHP, MEPB$ là tứ giác nội tiếp.

b) Chứng minh $\triangle OPM$ là tam giác vuông.

Câu 6 ***(2,0 điểm).*** Cho a,b,c là ba số dương. Chứng minh bất đẳng thức

$$\frac{4a^2+(b-c)^2}{2a^2+b^2+c^2}+\frac{4b^2+(c-a)^2}{2b^2+c^2+a^2}+\frac{4c^2+(a-b)^2}{2c^2+a^2+b^2}\ge 3.$$

Câu 7 ***(0,5 điểm).*** Trong bảng 11×11 ô vuông ta đặt các số tự nhiên từ 1 đến 121 vào các ô đó một cách tùy ý (mỗi ô đặt duy nhất một số và hai ô khác nhau thì đặt hai số khác nhau). Chứng minh rằng tồn tại hai ô vuông kề nhau (tức là hai ô vuông có chung một cạnh) sao cho hiệu của hai số đặt trong hai ô đó lớn hơn 5.

===Hết===

ĐỀ SỐ 25

Câu 1 ***(2,0 điểm)***

a) Cho biểu thức $P=\frac{a}{a+1}+\sqrt{1+a^2+\frac{a^2}{(a+1)^2}}$ với $a\neq -1$. Rút gọn biểu thức P và tính giá trị của biểu thức P khi $a=2020$.

b) Cho p,q là các số nguyên tố thỏa mãn $\frac{p}{p+1}+\frac{q+1}{q}=\frac{2n}{n+2}$ với mọi n là số nguyên dương. Tìm tất cả các giá trị dương của $q-p$.

Câu 2 ***(2,0 điểm)***

a) Giải phương trình: $\sqrt{3x-5}+\sqrt{7-3x}=9x^2-36x+38$.

b) Giải hệ phương trình: $\begin{cases}3x^2+2y^2-4xy+x+8y-4=0\\ x^2-y^2+2x+y-3=0\end{cases}$.

Câu 3 ***(0,5 điểm).*** Trong mặt phẳng Oxy, cho parabol $(P): y=x^2$. Trên (P) lấy 6 điểm phân biệt $A_i(a_i;a_i^2)$ với $i=1,2,...,6$. Giả sử $A_1A_2\perp A_4A_5$ và $A_2A_3\perp A_5A_6$. Chứng minh rằng nếu $(a_1+a_2)(a_2+a_3)(a_3+a_4)(a_4+a_5)(a_5+a_6)(a_6+a_1)\neq -1$ thì A_3A_4 và A_6A_1 không thể vuông góc với nhau.

Câu 4 ***(2,0 điểm).*** Cho hình vuông $ABCD$, trên tia đối của tia CD lấy điểm M bất kì ($CM<CD$), vẽ hình vuông $CMNP$ (P nằm giữa B và C), DP cắt BM tại H, MP cắt BD tại K.

a) Chứng minh rằng DH vuông góc với BM và tính $\frac{PC}{BC}+\frac{PH}{DH}+\frac{KP}{MK}$.

b) Chứng minh rằng $MP.MK+DK.BD=DM^2$.

Câu 5 ***(2,0 điểm).*** Cho (O) và (d) không giao nhau. Vẽ $OH\perp(d)$, lấy hai điểm A,B thuộc (d) sao cho $HA=HB$. Lấy điểm M thuộc đường tròn (O). Dựng các cát tuyến qua H,A,B và điểm M cắt đường tròn (O) lần lượt tại C,D,E, $DE\cap(d)=S$. Dựng đường thẳng qua O vuông góc với CE cắt tiếp tuyến tại E của (O) ở K. Dựng $ON\perp DE$ tại N.

a) Chứng minh tứ giác $HNCS$ là tứ giác nội tiếp.

b) Ba điểm S,C,K thẳng hàng.

Câu 6 ***(1,0 điểm)*** Cho ba số x,y,z không âm thỏa mãn $x^2+y^2+z^2=1$.

Chứng minh rằng $\sqrt{1-\left(\frac{x+y}{2}\right)^2}+\sqrt{1-\left(\frac{y+z}{2}\right)^2}+\sqrt{1-\left(\frac{x+z}{2}\right)^2}\geq\sqrt{6}$.

Câu 7 ***(0,5 điểm).*** Từ một đa giác đều 15 đỉnh, chọn ra 7 đỉnh bất kì. Chứng minh rằng có ba đỉnh trong số các đỉnh đã chọn là ba đỉnh của một tam giác cân.

===Hết===

BỘ ĐỀ LUYỆN THI VÀO LỚP 10 CHUYÊN TOÁN

HƯỚNG DẪN GIẢI ĐỀ SỐ 1

Câu 1

a) Ta có

$$P=\frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}-1}{a+\sqrt{ab}}+\frac{\sqrt{a}-\sqrt{b}}{2\sqrt{ab}}\left(\frac{\sqrt{b}}{a-\sqrt{ab}}+\frac{\sqrt{b}}{a+\sqrt{ab}}\right)$$

$$=\frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}-1}{\sqrt{a}\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)}+\frac{\sqrt{a}-\sqrt{b}}{2\sqrt{ab}}\left[\frac{\sqrt{b}}{\sqrt{a}\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)}+\frac{\sqrt{b}}{\sqrt{a}\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)}\right]$$

$$=\frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}-1}{\sqrt{a}\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)}+\frac{\sqrt{a}-\sqrt{b}}{2\sqrt{ab}}.\frac{\sqrt{b}\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)}{\sqrt{a}\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)}$$

$$=\frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}-1}{\sqrt{a}\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)}+\frac{1}{\sqrt{a}\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)}=\frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}-1+1}{\sqrt{a}\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)}=\frac{1}{\sqrt{a}}.$$

Khi đó

$$Q=2019+4P+13\sqrt{a}-6a+a\sqrt{a}=2019+\frac{4}{\sqrt{a}}+13\sqrt{a}-6a+a\sqrt{a}\ (a>0).$$

$$=2019+12+\left(a\sqrt{a}-4a+4\sqrt{a}\right)+\left(\sqrt{a}-4+\frac{4}{\sqrt{a}}\right)-\left(2a-8\sqrt{a}+8\right)$$

$$=2031+\sqrt{a}\left(a-4\sqrt{a}+4\right)+\frac{1}{\sqrt{a}}\left(a-4\sqrt{a}+4\right)-2\left(a-4\sqrt{a}+4\right)$$

$$=2031+\left(\sqrt{a}+\frac{1}{\sqrt{a}}-2\right)\left(a-4\sqrt{a}+4\right)=2030+\left(\sqrt{a}+\frac{1}{\sqrt{a}}-2\right)\left(\sqrt{a}-2\right)^2$$

Áp dụng bất đẳng thức AM – GM (Cô si) ta có $\sqrt{a}+\frac{1}{\sqrt{a}}\geq 2$.

Hơn nữa $\left(\sqrt{a}-2\right)^2\geq 0$ nên $Q\geq 2031$.

Vậy $\min Q=2031$ khi $a=1$ hoặc $a=4$. ❐

b) Không giảm tính tổng quát, giả sử $x \geq y$. Khi đó, ta có đánh giá

$$x^2 < x^2 + 8y \leq x^2 + 8x < (x+4)^2.$$

Do $x^2 + 8y$ là số chính phương nên ta xét các trường hợp sau:

- **Trường hợp 1:** $x^2 + 8y = (x+1)^2 \Leftrightarrow 8y = 2x + 1$. Điều này không thể xảy ra vì hai vế khác tính chẵn lẻ.
- **Trường hợp 2:** $x^2 + 8y = (x+3)^2 \Leftrightarrow 8y = 6x + 9$. Điều này cũng không thể xảy ra vì hai vế khác tính chẵn lẻ.
- **Trường hợp 3:** $x^2 + 8y = (x+2)^2 \Leftrightarrow x = 2y - 1$.
  Do $y^2 + 8x = y^2 + 8(2y-1) = y^2 + 16y - 8$ là số chính phương nên

  ta xét các khả năng sau

  - Với $y = 1$ thì cặp số $(x; y) = (1;1)$ thỏa yêu cầu bài toán.
  - Với $y \geq 2$, ta có

  $$(y+3)^2 < y^2 + 16y - 8 < (y+8)^2$$

  Do $y^2 + 16y - 8$ là số chính phương nên

  $$y^2 + 16y - 8 \in \{(y+4)^2, (y+5)^2, (y+6)^2, (y+7)^2\}.$$

Giải trực tiếp từng trường hợp ta thu được, ta thu được các cặp số

$$(5;3), (3;5), (21;11), (11;21).$$

Tóm lại, các cặp số $(x; y)$ thỏa mãn yêu cầu bài toán là

$$(1;1), (5;3), (3;5), (21;11), (11;21). \square$$

Câu 2

a) Đặt $a = x;\ b = x+1;\ c = \sqrt[3]{x+2}$. Khi đó $a^3 + b^3 + c^3 = 2x^3 + 3x^2 + 4x + 3$.

Phương trình đã cho thành

$$a^3 + b^3 + c^3 = 3abc \Leftrightarrow \frac{1}{2}(a+b+c)\left[(a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2\right] = 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a+b+c=0 \\ a-b=b-c=c-a=0 \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a+b+c=0 \\ a=b=c \end{array}\right..$$

- Với $a + b + c = 0$ ta có

$$x + (x+1) + \sqrt[3]{x+2} = 0$$

$$\Leftrightarrow \sqrt[3]{x+2} = -2x-1$$

$$\Leftrightarrow x+2 = (-2x-1)^3$$

$$\Leftrightarrow (x+1)(8x^2+8x+3) = 0$$

$$\Leftrightarrow x = -1 \text{ (do } 8x^2+8x+3>0, \forall x \in \mathbb{R}\text{)}.$$

- Với $a=b=c$ ta có $x = x+1 = \sqrt[3]{x+2}$ (vô lý).

Vậy phương trình đã cho có nghiệm duy nhất $x=1$. ❐

b) Hệ phương trình đã cho được viết lại như sau $\begin{cases} x^3+2xy^2+12y=0 \\ x^2+8y^2=12 \end{cases}$.

Thay $12 = x^2+8y^2$ vào phương trình đầu tiên của hệ, ta được:

$$x^3+2xy^2+(x^2+8y^2)y=0$$

$$\Leftrightarrow x^3+2xy^2+x^2y+8y^3=0$$

$$\Leftrightarrow (x^3+8y^3)+(2xy^2+x^2y)=0$$

$$\Leftrightarrow (x+2y)(x^2-2xy+4y^2)+xy(2y+x)=0$$

$$\Leftrightarrow (x+2y)(x^2-xy+4y^2)=0$$

- Nếu $x+2y=0 \Leftrightarrow x=-2y$ thì thay vào phương trình thứ hai của hệ

ta được $12y^2=12 \Leftrightarrow y=\pm 1$.

  - Với $y=1$ suy ra $x=-2$.
  - Với $y=-1$ suy ra $x=2$.

- Nếu $x^2-xy+4y^2=0 \Leftrightarrow \left(x-\dfrac{y}{2}\right)^2+\dfrac{15y^2}{4}=0 \Leftrightarrow x=y=0$ thì thay vào

phương trình thứ hai của hệ thấy không thỏa.

Vậy tập nghiệm của hệ phương trình đã cho là

$$S=\{(-2;1),(2;-1)\}.$$ ❐

Câu 3

Phương trình hoành độ giao điểm của hai đồ thị hàm số là

$$2x^2 = |mx| \Leftrightarrow 2|x|^2-|m|.|x|=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} |x|=0 \\ |x|=\dfrac{|m|}{2} \end{array}\right. \Leftrightarrow x \in \left\{0;\dfrac{m}{2};-\dfrac{m}{2}\right\}.$$

Để hai đồ thị cắt nhau tại 3 điểm phân biệt thì $m \neq 0$.

Gọi 3 giao điểm của hai đồ thị là $O(0;0)$; $A\left(\frac{m}{2};\frac{m^2}{2}\right);B\left(-\frac{m}{2};\frac{m^2}{2}\right)$.

Gọi H là giao điểm của AB và trục tung, suy ra $AB=|m|$; $OH=\frac{m^2}{2}$.

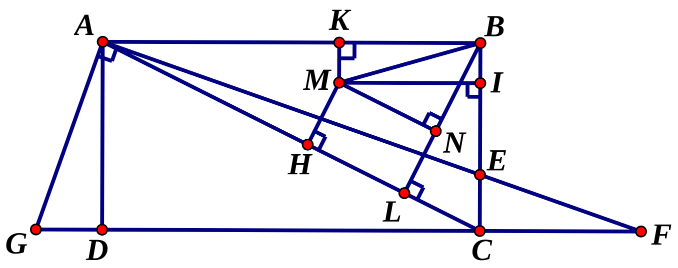
Do $\triangle OAB$ đều nên

$$OH=\frac{\sqrt{3}}{2}AB\Leftrightarrow\frac{m^2}{2}=\frac{\sqrt{3}}{2}|m|\Leftrightarrow|m|^2=\sqrt{3}|m|\Leftrightarrow m\in\{0;\sqrt{3};-\sqrt{3}\}$$

So điều kiện, chọn $m=\pm\sqrt{3}$.

Vậy $m=\pm\sqrt{3}$ thỏa mãn yêu cầu bài toán. ❐

Câu 4



a) Vẽ $AG\perp AF$ $(G\in CD)$.

Dễ thấy $\triangle ABE$ đồng dạng với $\triangle ADG$ (g-g)

Suy ra $\frac{AE}{AG}=\frac{AB}{AD}=2\Rightarrow AG=\frac{1}{2}AE$.

Xét $\triangle AGF$ vuông tại A ta có

$$\frac{1}{AD^2}=\frac{1}{AG^2}+\frac{1}{AF^2}$$

Khi đó

$$\frac{1}{\left(\frac{1}{2}AB\right)^2}=\frac{1}{\left(\frac{1}{2}AE\right)^2}+\frac{1}{AF^2}\ \text{hay}\ 4\left(\frac{1}{AB^2}-\frac{1}{AE^2}\right)=\frac{1}{AF^2}.$$

b) Vẽ đường cao BL trong tam giác ABC và $MN\perp BL$. Khi đó

$$MI^2+MK^2=MB^2\geq BN^2.$$

Mặt khác, $MH = NL$ nên

$$MI^2 + MH^2 + MK^2 \geq BN^2 + NL^2 \qquad (1)$$

Áp dụng bất đẳng thức $x^2 + y^2 \geq \dfrac{(x+y)^2}{2}$ ta có

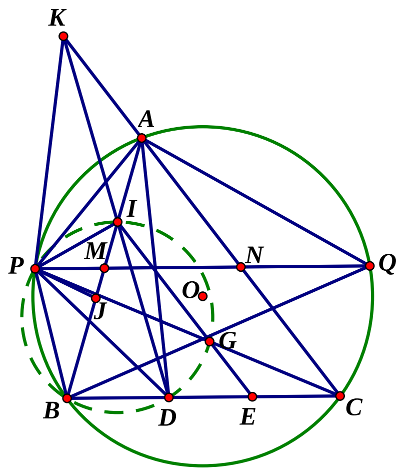
$$BN^2 + NL^2 \geq \frac{(BN+NL)^2}{2} = \frac{BL^2}{2} \qquad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra

$$MI^2 + MH^2 + MK^2 \geq \frac{BL^2}{2}.$$

Vậy $\min(MI^2 + MH^2 + MK^2) = \dfrac{BL^2}{2}$ khi và chỉ khi M là trung điểm BL. ❒

Câu 5



a) Do tứ giác $BDIP$ nội tiếp nên

$$\widehat{PIK} = 180^0 - \widehat{PID} = \widehat{PBC}.$$

Lại do tứ giác $APBC$ nội tiếp nên

$$\widehat{PAK} = 180^0 - \widehat{PAC} = \widehat{PBC}.$$

Suy ra

$$\widehat{PIK} = \widehat{PAK}.$$

Do đó tứ giác $AIPK$ nội tiếp.

Do các tứ giác $AIPK$ và $BDIP$ nội tiếp nên $\widehat{PKI} = \widehat{PAI}$ và $\widehat{PDI} = \widehat{PBI}$.

Suy ra $\triangle PKD \sim \triangle PAB$ (g – g), do đó

$$\frac{PK}{PD}=\frac{PA}{PB} \qquad (1)$$

Lại do tứ giác $APBQ$ nội tiếp nên $\widehat{MPB}=\widehat{MAQ}$ và $\widehat{MBP}=\widehat{MQA}$.

Suy ra $\triangle MPB \sim \triangle MAQ$ (g – g), do đó

$$\frac{PB}{QA}=\frac{MP}{MA} \qquad (2)$$

Tương tự, $\triangle MAP \sim \triangle MQB$ (g – g), suy ra

$$\frac{PA}{QB}=\frac{MP}{MB} \qquad (3)$$

Mà $MA=MB$ nên từ (2) và (3) ta suy ra

$$\frac{PB}{QA}=\frac{PA}{QB} \qquad (4)$$

Từ (1) và (4) ta đi đến

$$\frac{PK}{PD}=\frac{QB}{QA}.$$

b) Do các tứ giác $BDIG$ và $APBC$ nội tiếp nên $\widehat{PGI}=\widehat{PBI}$ và $\widehat{PBA}=\widehat{PCA}$, suy ra $\widehat{PGI}=\widehat{PCA}$. Do đó $IG // AC$ và

$$\frac{CD}{CE}=\frac{KD}{KI} \qquad (5)$$

Trên cạnh AB, lấy điểm J sao cho $\widehat{KPI}=\widehat{APJ}$.

Vì tứ giác $AIPK$ nội tiếp nên $\widehat{KPI}=180^0-\widehat{KAI}=\widehat{BAC}$ không đổi, vì thế J là điểm cố định, nghĩa là tỉ số $\frac{AB}{AJ}$ không đổi. (6)

Lại vì $\triangle PKI \sim PAJ$ (g – g) và $\triangle PKD \sim PAB$ (g – g) nên

$$\frac{KI}{AJ}=\frac{PK}{PA}=\frac{KD}{AB} \qquad (7)$$

Từ (5), (6) và (7) dẫn đến $\frac{CD}{CE}=\frac{AB}{AJ}$.

Vậy khi D di chuyển trên BC thì $\frac{CD}{CE}$ không đổi. ❒

Câu 6

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy-Schwarz ta có

$$(a+b)^2 = (1.a+1.b)^2 \le 2(a^2+b^2)\,. \qquad (1)$$

Hơn nữa, từ bất đẳng thức cơ bản $2ab \le a^2+b^2$ ta đi đến

$$4abc \le 2c(a^2+b^2) \qquad (2)$$

Cộng vế theo vế các bất đẳng thức (1) và (2) ta được

$$(a+b)^2 + 4abc \le 2(a^2+b^2)(c+1)$$

Suy ra

$$\frac{8}{(a+b)^2+4abc} \ge \frac{4}{(a^2+b^2)(c+1)} \qquad (3)$$

Áp dụng bất đẳng thức AM-GM ta có

$$\frac{4}{(a^2+b^2)(c+1)} + \frac{a^2+b^2}{2} \ge 2\sqrt{\frac{2}{c+1}} = \frac{4}{\sqrt{2(c+1)}} \qquad (4)$$

Lại áp dụng bất đẳng thức AM-GM ta được

$$\frac{c+3}{8} = \frac{(c+1)+2}{8} \ge \frac{\sqrt{2(c+1)}}{4} \qquad (5)$$

Từ (3), (4) và (5) ta suy ra

$$\frac{8}{(a+b)^2+4abc} + \frac{a^2+b^2}{2} \ge \frac{8}{c+3} \qquad (6)$$

Tương tự

$$\frac{8}{(b+c)^2+4abc} + \frac{b^2+c^2}{2} \ge \frac{8}{a+3} \qquad (7)$$

$$\frac{8}{(c+a)^2+4abc} + \frac{c^2+a^2}{2} \ge \frac{8}{b+3} \qquad (8)$$

Cộng vế theo vế các bất đẳng thức (6), (7) và (8) ta thu được

$$\frac{8}{(a+b)^2+4abc} + \frac{8}{(b+c)^2+4abc} + \frac{8}{(c+a)^2+4abc} + a^2+b^2+c^2$$
$$\ge \frac{8}{a+3} + \frac{8}{b+3} + \frac{8}{c+3}.$$

Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c=1$. ❒

Câu 7

Từ giả thiết ta có: $a+b+c=7$. Các bộ ba phần tử của X có tổng bằng 7 là $\{0;2;5\},\{0;3;4\},\{1;2;4\}$. Gọi A là tập các số $\overline{abcdef}$ cần tìm và

$$B=\left\{\overline{abcdef}\in A: a,b,c\in\{0;2;5\}\right\}$$

$$C=\left\{\overline{abcdef}\in A: a,b,c\in\{0;3;4\}\right\}$$

$$D=\left\{\overline{abcdef}\in A: a,b,c\in\{1;2;4\}\right\}.$$

Ta có: $A=B\cup C\cup D$ và B,C,D là các tập rời nhau.

Do đó: $|A|=|B|+|C|+|D|=2.(2.2.1).3!+3!.3!=84$. ❐

===Hết===

BỘ ĐỀ LUYỆN THI VÀO LỚP 10 CHUYÊN TOÁN

HƯỚNG DẪN GIẢI ĐỀ SỐ 2

Câu 1.

a) Ta có:

$$P=\left(\frac{\sqrt{a-b}}{\sqrt{a+b}+\sqrt{a-b}}+\frac{a-b}{\sqrt{a^2-b^2}-a+b}\right):\frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a^2+b^2}$$

$$=\left[\frac{\sqrt{a-b}}{\sqrt{a+b}+\sqrt{a-b}}+\frac{\left(\sqrt{a-b}\right)^2}{\sqrt{a-b}\left(\sqrt{a+b}-\sqrt{a-b}\right)}\right].\frac{a^2+b^2}{\sqrt{a^2-b^2}}$$

$$=\sqrt{a-b}.\left(\frac{1}{\sqrt{a+b}+\sqrt{a-b}}+\frac{1}{\sqrt{a+b}-\sqrt{a-b}}\right).\frac{a^2+b^2}{\sqrt{a^2-b^2}}$$

$$=\frac{2\sqrt{a-b}.\sqrt{a+b}}{(a+b)-(a-b)}.\frac{a^2+b^2}{\sqrt{a^2-b^2}}$$

$$=\frac{a^2+b^2}{b}.$$

Thay $a=b+1$ vào biểu thức P ta được

$$P=\frac{(b+1)^2+b^2}{b}=\frac{(1-2\sqrt{2}b+2b^2)+(2+2\sqrt{2})b}{b}=\frac{(1-\sqrt{2}b)^2}{b}+2+2\sqrt{2}\geq 2+2\sqrt{2}.$$

Vậy $\min P = 2 + 2\sqrt{2} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 - \sqrt{2}b = 0 \\ b = a - 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \dfrac{2+\sqrt{2}}{2} \\ b = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}$. ❒

b) **Cách 1**

Phương trình đã cho được viết lại như sau

$$x^3 + y^3 = 9xy \Leftrightarrow x^3 + y^3 + 3^3 - 3.x.y.3 = 27 \quad (*)$$

Áp dụng hằng đẳng thức $a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = (a+b+c)(a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca)$, ta có phương trình (*) tương đương với

$$(x+y+z)(x^2 + y^2 + 9 - xy - 3x - 3y) = 27$$

$$\Leftrightarrow (x+y+z)[(x+y)^2 - 3(x+y) - 3xy + 9] = 0.$$

Do $x, y \in \mathbb{Z}^+$ nên $x + y + 3 \geq 5$ nên $x + y + 3 \in \{9; 27\}$.

Xét các trường hợp:

- **Trường hợp 1:** $\begin{cases} x + y + 3 = 9 \\ (x+y)^2 - 3(x+y) - 3xy + 9 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y = 6 \\ xy = 8 \end{cases}$. Giải hệ này ta thu được các nghiệm $(x; y)$ là $(2; 4), (4; 2)$.
- **Trường hợp 2:** $\begin{cases} x + y + 3 = 27 \\ (x+y)^2 - 3(x+y) - 3xy + 9 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y = 24 \\ xy = \dfrac{512}{3} \end{cases}$ (vô lý).

Vậy các cặp số $(x; y)$ cần tìm là $(2; 4), (4; 2)$.

Cách 2

Áp dụng bất đẳng thức AM – GM cho hai số dương, ta có

$$9xy = x^3 + y^3 = (x+y)(x^2 + y^2 - xy) \geq (x+y)xy.$$

Suy ra

$$2 \leq x + y \leq 9.$$

Mặt khác, ta có

$$9xy = x^3 + y^3 \Leftrightarrow 9xy = (x+y)^3 - 3xy(x+y) \quad (*)$$

Suy ra $x + y$ chia hết cho 3. Do đó $x + y \in \{3; 6; 9\}$.

- **Trường hợp 1:** Với $x + y = 3$, thay vào (*) thì $xy = \dfrac{3}{2}$ (vô lý).

- **Trường hợp 2:** Với $x+y=6$, thay vào (*) ta được $xy=8 \Leftrightarrow x=4, y=2$ hoặc $x=2, y=4$.
- **Trường hợp 3:** Với $x+y=9$, thay vào (*) thì $xy=\frac{81}{4}$ (vô lý).

Vậy các cặp số $(x;y)$ cần tìm là $(2;4),(4;2)$. ❐

Câu 2

a) Điều kiện: $x \geq \sqrt[3]{2}$. Với điều kiện trên, phương trình đã cho tương đương với:

$$\left(\sqrt[3]{x^2-1}-2\right)+(x-3)=\sqrt{x^3-2}-5$$

$$\Leftrightarrow \frac{x^2-9}{\sqrt[3]{\left(x^2-1\right)^2}+2\sqrt[3]{x^2-1}+4}+(x-3)=\frac{x^3-27}{\sqrt{x^3-2}+5}$$

$$\Leftrightarrow (x-3)\left[\frac{x+3}{\sqrt[3]{\left(x^2-1\right)^2}+2\sqrt[3]{x^2-1}+4}+1\right]=\frac{(x-3)\left(x^2+3x+9\right)}{\sqrt{x^3-2}+5}$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=3 \\ \dfrac{x+3}{\sqrt[3]{\left(x^2-1\right)^2}+2\sqrt[3]{x^2-1}+4}+1=\dfrac{x^2+3x+9}{\sqrt{x^3-2}+5} \quad (*) \end{array}\right.$$

Nhận xét: $\frac{x^2+3x+9}{\sqrt{x^3-2}+5}>2$; $\frac{x+3}{\sqrt[3]{\left(x^2-1\right)^2}+2\sqrt[3]{x^2-1}+4}<1$

Thật vậy,

- $\frac{x^2+3x+9}{\sqrt{x^3-2}+5}>2 \Leftrightarrow x^2+3x+9>2\left(\sqrt{x^3-2}+5\right)$
- $2\sqrt{x^3-2}<x^2+3x-1 \Leftrightarrow 4x^3-8<x^4+9x^2+1+6x^3-2x^2-6x$

  $\Leftrightarrow x^4+2x^3+7x^2-6x+9>0 \Leftrightarrow \left(x^2+x\right)^2+(x-3)^2+5x^2>0$ (luôn đúng).
- $\frac{x+3}{\sqrt[3]{\left(x^2-1\right)^2}+2\sqrt[3]{x^2-1}+4}<1 \Leftrightarrow \sqrt[3]{\left(x^2-1\right)^2}+2\sqrt[3]{x^2-1}+1>x$.

Đặt $t=\sqrt[3]{x^2-1}$; $t>0$. Cần chứng minh: $t^2+2t+1>\sqrt{t^3+1}$.

Ta có: $t^2+2t+1>\sqrt{t^3+1} \Leftrightarrow t^4+3t^3+6t^2+4t>0$ (luôn đúng $\forall t>0$).

Do đó phương trình (*) vô nghiệm.

Vậy phương trình đã cho có nghiệm duy nhất $x=3$. ❐

b) Phương trình thứ hai của hệ được viết lại như sau: $x^2+\left(y-3\right)x+y^2-4y+4=0$. Xem đây là một phương trình bậc hai đối với x. Phương trình này có nghiệm khi và chỉ khi $\Delta_x \ge 0 \Leftrightarrow \left(y-3\right)^2-4.1.\left(y^2-4y+4\right)\ge 0 \Leftrightarrow 1\le y\le \dfrac{7}{3}$.

Tương tự ta cũng xét một phương trình bậc hai đối với y và thu được $0\le x\le \dfrac{4}{3}$.

Khi đó

$$x^4+y^2\le \left(\frac{4}{3}\right)^4+\left(\frac{7}{3}\right)^2=\frac{697}{81}.$$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow x=\dfrac{4}{3}, y=\dfrac{7}{3}$. Thay vào hệ phương trình thấy không thỏa.

Vậy hệ phương trình đã cho vô nghiệm. ❐

Câu 3

Phương trình hoành độ giao điểm của (P) và d là

$$x^2=mx+3 \Leftrightarrow x^2-mx-3=0 \quad (*)$$

Vì $\dfrac{c}{a}=-3<0$ nên phương trình luôn có hai nghiệm trái dấu $\forall m$. Do đó d luôn cắt (P) tại hai điểm phân biệt $\forall m$. Gọi $A(x_1;mx_1+3), B(x_2;mx_2+3)$.

Do x_1,x_2 là hai nghiệm của phương trình (*) nên theo định lí Vi-ét ta có

$$\begin{cases} x_1+x_2=m \\ x_1x_2=-3 \end{cases}.$$

Ta có

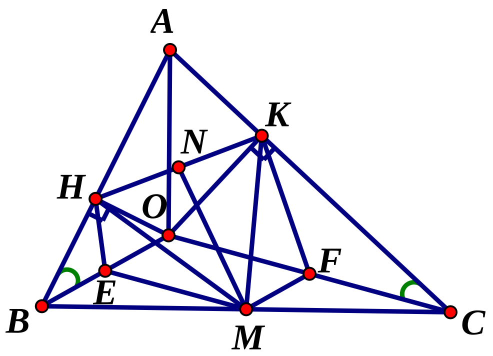
$$AB^2=(x_2-x_1)^2+(mx_2-mx_1)^2=(m^2+1)(x_2-x_1)^2$$

$$=(m^2+1)[(x_1+x_2)^2-4x_1x_2]=(m^2+1)(m^2+12)\ge 12.$$

Suy ra $AB\ge 2\sqrt{3}$.

Vậy $\min AB=2\sqrt{3}$ khi và chỉ khi $m=0$. ❐

Câu 4



a) Ta có

$\dfrac{OB}{OC}=\dfrac{OH:\sin\widehat{OBH}}{OK:\sin\widehat{OCK}}$ (do $\triangle OBH,\triangle OCK$ lần lượt vuông tại H,K)

$=\dfrac{OH}{OK}$ (do $\widehat{ABO}=\widehat{ACO}$)

$=\dfrac{OA.\sin\widehat{OAH}}{OA.\sin\widehat{OAK}}$ (do $\triangle OAH,\triangle OAK$ lần lượt vuông tại H,K)

$=\dfrac{\sin\widehat{OAB}}{\sin\widehat{OAC}}$ hay $OB.\sin\widehat{OAC}=OC.\sin\widehat{OAB}$.

b) Gọi E,F lần lượt là trung điểm của OB,OC.

Do $MEOF$ là hình bình hành nên $\widehat{MEO}=\widehat{MFO}$ (1)

Ta có

$\widehat{OEH}=2\widehat{ABO}=2\widehat{ACO}=\widehat{OFK}$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra $\widehat{MEH}=\widehat{MFK}$.

Lại có

$ME=OF=FK;EH=EO=MF$ nên $\triangle MEH=\triangle MFK$ (c.g.c).

Suy ra $MH=MK\Rightarrow\triangle MHK$ cân tại $M\Rightarrow MN\perp HK$. ❐

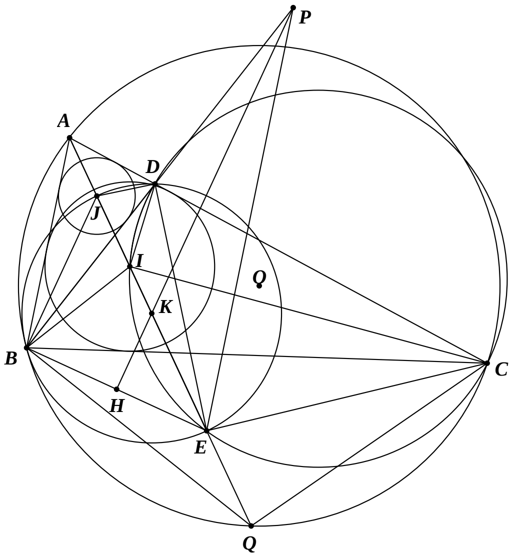
Câu 5

a) Ta có AI là phân giác của $\widehat{BAC}$ nên Q là điểm chính giữa của cung BC của (O).

Suy ra $\widehat{BAQ}=\widehat{QAC}=\widehat{QBC}$.

$\widehat{IBQ}=\widehat{IBC}+\widehat{QBC}=\widehat{IBA}+\widehat{BAQ}=\widehat{BIQ}$

Hay tam giác QBI cân tại Q.



Do $\triangle ABD \sim \triangle ACB$ nên

$$\frac{AB}{AC} = \frac{AD}{AB} \text{ hay } AB^2 = AD.AC \quad (1)$$

Tam giác ADI đồng dạng tam giác AEC

Do $\triangle ADI \sim \triangle AEC$ (có góc A chung và $\widehat{AID} = \widehat{ACE}$) nên

$$\frac{AD}{AE} = \frac{AI}{AC} \text{ hay } AI.AE = AD.AC \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra $AI.AE = AB^2$,

Suy ra $\triangle ABI \sim \triangle AEB$

Suy ra $\widehat{AEB} = \widehat{ABI} = \dfrac{\widehat{ABC}}{2}$

Ta có $\widehat{AEP} = \widehat{BAE} = \dfrac{\widehat{BAC}}{2}$ (hai góc so le trong),

Suy ra $\widehat{BEP} = \dfrac{\widehat{ABC} + \widehat{BAC}}{2}$.

Theo a) ta có $\widehat{BIQ} = \dfrac{\widehat{BAC} + \widehat{ABC}}{2}$ suy ra $\widehat{BIQ} = \widehat{BEP}$

Ta có $\widehat{BPE} = \widehat{ABD} = \widehat{ACB} = \widehat{BQI}$

Suy ra $\triangle PBE \sim \triangle QBI$, suy ra $\dfrac{BP}{BQ} = \dfrac{BE}{BI} \Leftrightarrow BP.BI = BE.BQ$.

b) Do $\triangle PBE \sim \triangle QBI$ và tam giác BQI cân tại Q nên tam giác PBE cân tại P, suy ra $\widehat{PBE} = \dfrac{\widehat{BAC} + \widehat{ABC}}{2}$ và $PH \perp BE$ với H là trung điểm của BE.

Do HK là đường trung bình của tam giác EBJ nên $HK//BJ$.

Ta có $\widehat{JBD} = \dfrac{\widehat{ACB}}{2}$ và $\widehat{DBE} = \dfrac{\widehat{BAC} + \widehat{ABC}}{2}$, suy ra $\widehat{JBE} = 90^{\circ}$ hay JB vuông góc BE.

Suy ra *PH//JB*, suy ra *P, H, K* thẳng hàng hay *PK//JB*. ❐

Câu 6

Đặt $x = bc, y = ca, z = ab$. Khi đó

$$\frac{x+y+z}{3x} = \frac{3abc}{3bc} = a\,;\ \frac{x+y+z}{3y} = b\,;\ \frac{x+y+z}{3z} = c\,.$$

Bất đẳng thức cần chứng minh trở thành

$$\frac{9x^2y^2}{x^2+2y^2} + \frac{9y^2z^2}{y^2+2z^2} + \frac{9z^2x^2}{z^2+2x^2} \le (x+y+z)^2.$$

Áp dụng bất đẳng thức AM – GM ta có

$$x^2 + 2y^2 = x^2 + y^2 + y^2 \ge 3\sqrt[3]{x^2.y^2.y^2} = 3\sqrt[3]{x^2y^4}\,.$$

Suy ra

$$\frac{9x^2y^2}{x^2+2y^2} \le \frac{9x^2y^2}{3\sqrt[3]{x^2y^4}} = 3\sqrt[3]{x^4y^2}\,.$$

Lại áp dụng bất đẳng thức AM – GM ta có

$$3\sqrt[3]{x^4y^2} = 3\sqrt[3]{x^2.xy.xy} \le x^2 + xy + xy = x^2 + 2xy\,.$$

Suy ra

$$\frac{9x^2y^2}{x^2+2y^2} \le x^2 + 2xy\,.$$

Chứng minh tương tự

$$\frac{9y^2z^2}{y^2+2z^2} \le y^2 + 2yz\,;\ \frac{9z^2x^2}{z^2+2x^2} \le z^2 + 2zx\,.$$

Cộng vế theo vế ba bất đẳng thức trên, ta đi đến

$$\frac{9x^2y^2}{x^2+2y^2} + \frac{9y^2z^2}{y^2+2z^2} + \frac{9z^2x^2}{z^2+2x^2} \le (x+y+z)^2.$$

Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x = y = z$ hay $a = b = c = 1$. ❐

Câu 7. Gọi A là tập các số có 4 chữ số $\overline{abcd}$ $(a \ge 1)$ sao cho $a+b+c+d$ chia hết cho 4.

Xét $b+c+d = 4k + r$ $(0 \le r \le 3)$. Nếu $r \in \{0;1;2\}$ thì với mỗi giá trị của r tồn tại hai giá trị của a sao cho $a+b+c+d$ chia hết cho 4 là $a = 4-r$ và $a = 8-r$. Nếu $r = 3$ thì tồn tại ba giá trị của a sao cho $a+b+c+d$ chia hết cho 4 là $a = 1, a = 7, a = 9$.

Ký hiệu: $B=\left\{\overline{bcd}:0\le b,c,d\le 9;b+c+d=4k+r,0\le r\le 2\right\}$

$C=\left\{\overline{bcd}:0\le b,c,d\le 9;b+c+d=4k+3\right\}$

Ta có: $A=2\times|B|+3\times|C|=2\times\left(|B|+|C|\right)+|C|=2\times 10^3+|C|$.

Xét tập hợp C. Giả sử $c+d=4m+s$. Nếu $s\in\{0;1\}$ thì tồn tại hai giá trị của b sao cho $b+c+d=4k+3$. Nếu $s\in\{2;3\}$ thì tồn tại ba giá trị của b sao cho $b+c+d=4k+3$.

Ký hiệu: $D=\left\{\overline{cd}:0\le c,d\le 9;c+d=4m+s\left(0\le s\le 1\right)\right\}$

$E=\left\{\overline{cd}:0\le c,d\le 9,c+d=4m+s,2\le s\le 3\right\}$.

Ta có: $|C|=2\times|D|+3\times|E|=2\times\left(|D|+|E|\right)+|E|=2\times 10^3+|E|$.

Xét tập E: đếm trực tiếp theo tổng $c+d$ ta được: $|E|=24+25=49$.

Vậy $A=2\times 10^3+2\times 10^2+49=2249$. ❒

===Hết===

BỘ ĐỀ LUYỆN THI VÀO LỚP 10 CHUYÊN TOÁN

HƯỚNG DẪN GIẢI ĐỀ SỐ 3

Câu 1

a) Ta có

$a(4-b)(4-c)$

$=a(16-4b-4c+bc)=a[4(a+b+c+\sqrt{abc})-4b-4c+bc]$

$=a(4a+4b+4c+4\sqrt{abc}-4b-4c+bc)=a(4a+4\sqrt{abc}+bc)$

$=4a^2+4a\sqrt{abc}+abc=(2a+\sqrt{abc})^2$.

Suy ra

$$\sqrt{a(4-b)(4-c)}=2a+\sqrt{abc}.$$

Tương tự

$$\sqrt{b(4-c)(4-a)}=2b+\sqrt{abc}\ ;$$

$$\sqrt{c(4-a)(4-b)} = 2c + \sqrt{abc} \ .$$

Do đó

$$P = 2(a+b+c+\sqrt{abc}) + 2019 = 2.4 + 2019 = 2027 \ . \ ❒$$

b) Theo đề, ta có $(x-y)(x+y) = 100.30^{2n}$.

Suy ra $x+y$ và $x-y$ đều chẵn.

Đặ $a = \dfrac{x+y}{2}, b = \dfrac{x-y}{2}$, ta thu được: $ab = 2^{2n}.3^{2n}.5^{2n+2} = A$.

Số các ước của A là $(2n+1)^2(2n+3)$.

Vì $a > b$ nên suy ra số cặp $(x;y)$ thỏa mãn là số cặp $(a;b)$ thỏa mãn là

$$\frac{1}{2}[(2n+1)^2(2n+3)-1] = (n+1)(4n^2+6n+1) \ .$$

Ta sẽ chứng minh $(n+1)(4n^2+6n+1)$ không thể là số chính phương.

Thật vậy, giả sử $(n+1)(4n^2+6n+1)$ là số chính phương.

Do $\gcd(n+1;4n^2+6n+1)=1$ nên $4n^2+6n+1$ phải là số chính phương. Điều này vô lý vì $(2n+1)^2 < 4n^2+6n+1 < (2n+2)^2$. ❒

Câu 2

a) Điều kiện: $0 \le x \le 2$.

Với điều kiện trên, phương trình đã cho tương đương với:

$$\left(x+\sqrt{x}+1\right)\sqrt{2-x} = (x+1)^2 - \left(\sqrt{x}\right)^2$$

$$\Leftrightarrow \left(x+\sqrt{x}+1\right)\sqrt{2-x} = \left(x+\sqrt{x}+1\right)\left(x-\sqrt{x}+1\right)$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{2-x} = x-\sqrt{x}+1 \text{ (do } x-\sqrt{x}+1>0 \text{ với mọi } 0\le x\le 2)$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x}+\sqrt{2-x} = x+1 \Leftrightarrow x+2\sqrt{x(2-x)}+2-x = x^2+2x+1$$

$$\Leftrightarrow 2\sqrt{x(2-x)} = x^2+2x-1 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2+2x-1 \ge 0 \\ 4x(2-x) = \left(x^2+2x-1\right)^2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq \sqrt{2}-1 \\ (x-1)\left(x^3+5x^2+11x-1\right)=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq \sqrt{2}-1 \\ \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x^3+5x^2+11x-1=0\ (*) \end{array}\right. \end{cases}.$$

Với $x \geq \sqrt{2}-1>0$ thì $x^3+5x^2+11x>0^3+5.0+11.\left(\sqrt{2}-1\right)>1$. Do đó phương trình (*) vô nghiệm.

Vậy phương trình đã cho có nghiệm duy nhất là $x=1$.

Bình luận. *Cần chú ý đến phân tích quen thuộc và hấp dẫn sau đây*

$$x^4+ax^2+1=\left(x^2+1\right)^2-(2-a)x^2=\left(x^2+1\right)^2-\left(x\sqrt{2-a}\right)^2$$

$$=\left(x^2-x\sqrt{2-a}+1\right)\left(x^2+x\sqrt{2-a}+1\right) \text{ với } a<2. \square$$

b) $\forall x, y \in \mathbb{R}$ ta có:

$$5x^2+2xy+2y^2=(2x+y)^2+(x-y)^2 \geq 0;\ 2x^2+2xy+5y^2=(x+2y)^2+(x-y)^2 \geq 0.$$

Điều kiện để hệ phương trình xác định là: $.2x+y+1 \geq 0$.

Viết lại phương trình thứ nhất của hệ và đánh giá như sau:

$$\sqrt{5x^2+2xy+2y^2}+\sqrt{2x^2+2xy+5y^2}=\sqrt{(2x+y)^2+(x-y)^2}+\sqrt{(x+2y)^2+(x-y)^2}$$
$$\geq |2x+y|+|x+2y| \geq 3|x+y| \geq 3(x+y).$$

Phương trình thứ nhất của hệ chỉ có thể được thỏa mãn nếu:

$$\begin{cases} x-y=0 \\ 2x+y \geq 0 \\ x+2y \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow x=y \geq 0 .$$

Thay vào phương trình thứ hai của hệ ta được:

$$\sqrt{3x+1}+2\sqrt[3]{19x+8}=2x^2+x+5$$

$$\Leftrightarrow 2x^2-2x+\left((x+1)-\sqrt{3x+1}\right)+2\left((x+2)-\sqrt[3]{19x+8}\right)=0$$

$$\Leftrightarrow 2\left(x^2-x\right)+\frac{x^2-x}{x+1+\sqrt{3x+1}}+\frac{(2x+14)\left(x^2-x\right)}{(x+2)^2+(x+2)\sqrt[3]{19x+8}+\sqrt[3]{(19x+8)^2}}=0$$

$$\Leftrightarrow x^2-x=0.$$

(do $2+\dfrac{1}{x+1+\sqrt{3x+1}}+\dfrac{2x+14}{(x+2)^2+(x+2)\sqrt[3]{19x+8}+\sqrt[3]{(19x+8)^2}}>0$)

Vậy phương trình đã cho có hai nghiệm là: $(0;0),(1;1)$. ❐

Câu 3

Phương trình hoành độ giao điểm của (P) và d là

$$x^2=5mx+4m \Leftrightarrow x^2-5mx-4m=0 \quad (1)$$

d cắt (P) tại hai điểm phân biệt A,B

$\Leftrightarrow$ phương trình (1) có 2 nghiệm phân biệt $x_1,\ x_2$ $\Leftrightarrow \Delta=25m^2+16m>0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m<-\dfrac{16}{25} \\ m>0 \end{array}\right.$

(*)

Theo định lý Viet, ta có: $\begin{cases} x_1+x_2=5m \\ x_1x_2=-4m \end{cases}$.

Vì x_1 là nghiệm của phương trình nên: $x_1^2-5mx_1-4m=0 \Rightarrow x_1^2=5mx_1+4m$.

Do đó

$x_1^2+5mx_2+12m=5mx_1+4m+5mx_2+12m=5m(x_1+x_2)+16m=15m^2+16m>0$.

Tương tự, ta cũng tính được: $x_2^2+5mx_1+12m=25m^2+16m>0$.

Khi đó: $A=\dfrac{m^2}{x_1^2+5mx_2+12m}+\dfrac{x_2^2+5mx_1+12m}{m^2}=\dfrac{m^2}{25m^2+16m}+\dfrac{25m^2+16m}{m^2}\geq 2$.

(Bất đẳng thức AM – GM cho 2 số dương).

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi

$\dfrac{m^2}{25m^2+16m}=\dfrac{25m^2+16m}{m^2} \Leftrightarrow m^4=(25m^2+16m)^2 \Leftrightarrow m^2=25m^2+16m$

$$\Leftrightarrow 24m^2+16m=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=0 \\ m=-\dfrac{2}{3} \end{array}\right..$$

Kết hợp với (*) ta chọn $m=-\dfrac{2}{3}$.

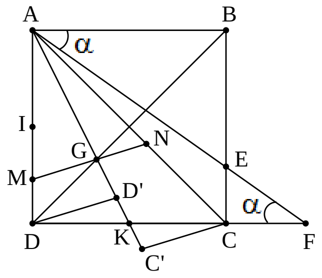
Vậy $\min A=2$ khi $m=-\dfrac{2}{3}$. ❐

Câu 4

a) **Cách 1**

Ta có

$$\frac{1}{AE^2}+\frac{1}{AF^2}=\frac{1}{AB^2}\Leftrightarrow\left(\frac{AB}{AE}\right)^2+\left(\frac{AB}{AF}\right)^2=1.$$



Đặt $\widehat{BAE}=\widehat{AFD}=\alpha$. Ta có: $\frac{AB}{AE}=\cos\alpha,\ \frac{AB}{AF}=\frac{AD}{AF}=\sin\alpha$.

Vậy $\left(\frac{AB}{AE}\right)^2+\left(\frac{AB}{AF}\right)^2=\cos^2\alpha+\sin^2\alpha=1$.

Cách 2

Ta có

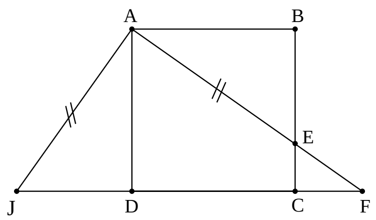
$$\frac{1}{AE^2}+\frac{1}{AF^2}=\frac{1}{AB^2}\Leftrightarrow\frac{AB^2}{AE^2}+\frac{AB^2}{AF^2}=1\Leftrightarrow\frac{DC^2}{AE^2}+\frac{AD^2}{AF^2}=1.$$

Lại có

$$\frac{AE}{AF}=\frac{DC}{DF}\Rightarrow\frac{DC}{AE}=\frac{DF}{AF}.$$

Vậy $\frac{DC^2}{AE^2}+\frac{AD^2}{AF^2}=\frac{DF^2}{AF^2}+\frac{AD^2}{AF^2}=\frac{DF^2+AD^2}{AF^2}=\frac{AF^2}{AF^2}=1.$

Cách 3



Dựng đường thẳng qua *A*, vuông góc với *AE* và cắt đường thẳng *CD* tại *J*.

+ Chứng minh được hai tam giác *ADJ* và *ABE* bằng nhau. Suy ra *AJ* = *AE*.

+ Trong tam giác vuông *AJF* có:

$$\frac{1}{AD^2}=\frac{1}{AJ^2}+\frac{1}{AF^2}\Leftrightarrow\frac{1}{AB^2}=\frac{1}{AE^2}+\frac{1}{AF^2}.$$

b) **Cách 1**

- **Trường hợp 1:** M trùng I hoặc M trùng D ta có: $\frac{AD}{AM}+\frac{AC}{AN}=3$.
- **Trường hợp 2:** M khác I và M khác D:

Gọi K là trung điểm của CD. Dựng CC'// MG, DD'// MG (C', D' thuộc AG).

Khi đó

$$\frac{AD}{AM}=\frac{AD'}{AG},\frac{AC}{AN}=\frac{AC'}{AG}.$$

Do đó

$$\frac{AD}{AM}+\frac{AC}{AN}=\frac{AD'}{AG}+\frac{AC'}{AG}=\frac{AD'+AC'}{AG}.$$

Hai tam giác KDD' và KCC' bằng nhau nên $KC'=KD'$.

Suy ra

$$\frac{AD}{AM}+\frac{AC}{AN}=\frac{2AK}{AG}=2.\frac{3}{2}=3.$$

Ta có

$$3=\frac{AD}{AM}+\frac{AC}{AN}\ge 2\sqrt{\frac{AD}{AM}.\frac{AC}{AN}}\Rightarrow AM.AN\ge\frac{4}{9}AD.AC \quad (AD,\ AC \text{ không đổi}).$$

Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi

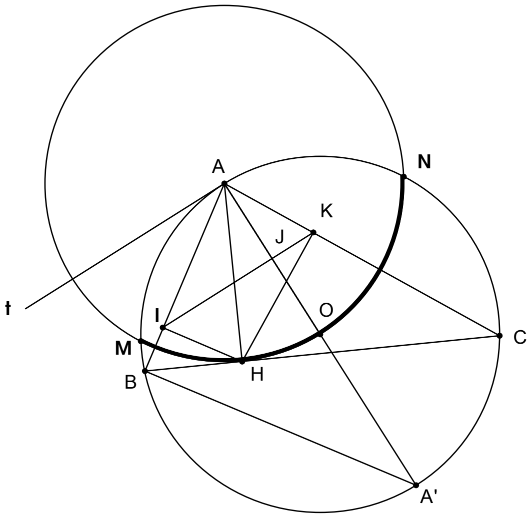
$$\frac{AD}{AM}=\frac{AC}{AN}\Leftrightarrow MN\,//\,DC \text{ hay } MG\,//\,DC.$$

Khi đó

$$\frac{AM}{AD}=\frac{AG}{AK}=\frac{2}{3}.$$

Vậy khi $AM.AN$ nhỏ nhất thì $\frac{AM}{AD}=\frac{2}{3}$. ❐

Câu 5



a) Ta có $\widehat{AIH}=90^0; \widehat{AKH}=90^0$. Vì $\widehat{AIH}+\widehat{AKH}=180^0$ nên tứ giác $AIHK$ nội tiếp.

Kẻ tiếp tuyến At của đường tròn $(O;R)$ tại A.

Ta có: $\begin{cases} \widehat{ACB}+\widehat{HAC}=90^0 \\ \widehat{AHK}+\widehat{HAC}=90^0 \end{cases} \Rightarrow \widehat{ACB}=\widehat{AHK}$ (1)

Ta lại có: $\widehat{AHK}=\widehat{AIK}$ (do tứ giác $AIHK$ nội tiếp) (2)

$\widehat{BAt}=\widehat{ACB}$ (cùng bằng $\dfrac{1}{2}$ sđ $\overset{\frown}{AB}$) (3)

Từ (1), (2) và (3) suy ra: $\widehat{BAt}=\widehat{AIK} \Rightarrow At \parallel IK$.

Mặt khác $OA \perp At \Rightarrow IK \perp OA$. Vậy IK luôn vuông góc với đường thẳng cố định OA.

Gọi J là giao điểm của AO và IK; A' là điểm đối xứng với A qua O.

Ta có: $\Delta ACH \sim \Delta AA'B \left(\widehat{AHC}=\widehat{ABA'}=90^0; \widehat{ACH}=\widehat{AA'B}\right)$.

$\Rightarrow \dfrac{AC}{AA'}=\dfrac{AH}{AB} \Rightarrow AB.AC=AH.AA'=2R.AH=2R^2$.

b) Ta có $\Delta AKH \sim \Delta AHC \Rightarrow \dfrac{AK}{AH}=\dfrac{AH}{AC} \Rightarrow AK.AC=AH^2$.

Gọi S, S' lần lượt là diện tích các tam giác ABC và AIK.

Ta có $\Delta AIK \sim \Delta ACB \Rightarrow \dfrac{AI}{AC}=\dfrac{AK}{AB}=\dfrac{IK}{BC}=\dfrac{AJ}{AH}$, suy ra:

$$\frac{S'}{S}=\frac{\frac{1}{2}AJ.IK}{\frac{1}{2}AH.BC}=\frac{AJ}{AH}.\frac{IK}{BC}=\left(\frac{AK}{AB}\right)^2=\left(\frac{AK.AC}{AB.AC}\right)^2=\frac{AH^4}{\left(AH.2R\right)^2}=\frac{AH^2}{4R^2}=\frac{1}{4}.$$

Suy ra $S'=\frac{1}{4}.S=\frac{1}{8}AH.BC=\frac{R}{8}.BC\le\frac{R}{8}.2R=\frac{R^2}{4}$.

Vậy giá trị lớn nhất của tam giác AIK bằng $\frac{R^2}{4}$, đạt khi $H\equiv O$. ❒

Câu 6

Đặt $x=b+c-a;\ y=c+a-b;\ z=a+b-c$.

Suy ra $x,y,z>0$ và $a=\frac{y+z}{2},b=\frac{z+x}{2},c=\frac{x+y}{2}$.

Áp dụng bất đẳng thức AM – GM ta có

$$P=\frac{2y+2z}{x}+\frac{9z+9x}{2y}+\frac{8x+8y}{z}$$

$$=\left(\frac{2y}{x}+\frac{9x}{2y}\right)+\left(\frac{2z}{x}+\frac{8x}{z}\right)+\left(\frac{9z}{2y}+\frac{8y}{z}\right)\ge 2\sqrt{9}+2\sqrt{16}+2\sqrt{36}=26.$$

Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi

$$\frac{2y}{x}=\frac{9x}{2y},\frac{2z}{x}=\frac{8x}{z},\frac{9z}{2y}=\frac{8y}{z}\Leftrightarrow 4y^2=9x^2,2z^2=8x^2,9z^2=8y^2\Leftrightarrow x=\frac{z}{2},y=\frac{3}{2}x,z=\frac{4}{3}y$$

Vậy $\min P=26\Leftrightarrow x=\frac{z}{2},y=\frac{3}{2}x,z=\frac{4}{3}y$. ❒

Câu 7

Xét 3 phần tử $x_1,x_2,x_3\in X$. Đặt $c_i=\sqrt[4]{x_i}$, $i=1,2,3$ ta có: $1\le c_i\le 3$. Chia khoảng $[1;3]$ thành hai khoảng $[1;2]$ và $[2;3]$. Theo nguyên lý Dirichlet thì ba trong số c_1,c_2,c_3 có hai số cùng thuộc một trong hai khoảng nói trên. Giả sử hai số đó là: $x=\sqrt[4]{a}$ và $y=\sqrt[4]{b}$ thì a,b là hai số thỏa mãn yêu cầu bài toán. ❒

===Hết===

BỘ ĐỀ LUYỆN THI VÀO LỚP 10 CHUYÊN TOÁN

HƯỚNG DẪN GIẢI ĐỀ SỐ 4

Câu 1

a) Từ $x=1+\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{4}$ suy ra $\sqrt[3]{2}x=\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{4}+2=x+1$. Khi đó

$$2x^3=(x+1)^3 \Rightarrow x^3-3x^2-3x=1.$$

Vậy $P=\sqrt{2020}$. ❐

b) Đặt $\sqrt[3]{2+\sqrt{b}}=x;\ \sqrt[3]{2-\sqrt{b}}=y$.

Do $b>0$ nên $x>0$. Khi đó $xy=\sqrt[3]{4-b}$ và $x^3+y^3=4$.

Do đó phương trình nghiệm nguyên đã cho trở thành

$$\frac{x^3+y^3}{a}+xy=x^2+y^2 \Leftrightarrow \frac{(x+y)(x^2+y^2-xy)}{a}=x^2+y^2-xy.$$

Do $x^2+y^2-xy=\left(y-\frac{x}{2}\right)^2+\frac{3x^2}{4}>0,\forall x>0$ nên $x+y=a$.

Bây giờ ta có

$$\sqrt[3]{2+\sqrt{b}}+\sqrt[3]{2-\sqrt{b}}=a^3 \qquad (1)$$

$$\Rightarrow 4+3\sqrt[3]{4-b}.a=a^3 \qquad (2)$$

$$\text{hay } 4-b=\left(\frac{a^3-4}{3a}\right)^3.$$

Vì b là số nguyên nên $a^3-4 \vdots 3a \Rightarrow a^3-4 \vdots a \Rightarrow 4 \vdots a \Rightarrow a\in\{1;2;4\}$.

- Với $a=1$ thì $b=5$.
- Với $a=2$ hoặc $a=4$ thì b không phải là số nguyên dương.

Thử lại: với $a=1,b=5$ ta sẽ thấy (2) đúng bởi vì

$$x^3+y^3+3xyz=a^3 \Leftrightarrow a^3-x^3-y^3-3xya=0$$

$$\Leftrightarrow (a-x-y)[(a+x)^2+(a+y)^2+(x-y)^2]=0.$$

Do $x>0,a>0$ nên $x+a>0$, suy ra $(a+x)^2+(a+y)^2+(x-y)^2>0$.

Suy ra $a-x-y=0 \Leftrightarrow a=x+y$. Điều này chứng tỏ (1) đúng. ❐

Câu 2

a) Điều kiện: $-1 \le x \le 1$. Với điều kiện này, phương trình đã cho tương đương với:

$$x^2\left(13\sqrt{1-x^2}+9\sqrt{1+x^2}\right)^2=256$$

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy-Schwarz ta có:

$$\left(\sqrt{13}.\sqrt{13-13x^2}+3\sqrt{3}.\sqrt{3+3x^2}\right)^2 \le (13+27)\left(13-13x^2+3+3x^2\right)=40\left(16-10x^2\right).$$

Áp dụng bất đẳng thức AM – GM ta có:

$$10x^2\left(16-10x^2\right) \le \left(\frac{10x^2+16-10x^2}{2}\right)^2=64.$$

Khi đó

$$x^2\left(13\sqrt{1-x^2}+9\sqrt{1+x^2}\right)^2 \le 256.$$

Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi

$$\begin{cases}\sqrt{1-x^2}=\dfrac{\sqrt{1+x^2}}{3}\\ 10x^2=16-10x^2\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}9-9x^2=1+x^2\\ 20x^2=16\end{cases} \Leftrightarrow x^2=\frac{4}{5} \Leftrightarrow x=\pm\frac{2\sqrt{5}}{5}.$$

Vậy phương trình đã cho có 2 nghiệm là: $x=\frac{2\sqrt{5}}{5}$; $x=-\frac{2\sqrt{5}}{5}$. ❐

b) **Cách 1**

Nhân phương trình thứ hai của hệ với -8 rồi cộng với phương trình thứ nhất ta được:

$$x^4-8x^3+24x^2-32x+16=y^4-16y^3+96y^2-256y+256$$
$$\Leftrightarrow (x-2)^4=(y-4)^4 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x-2=y-4\\ x-2=4-y\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=y-2\\ x=6-y\end{array}\right..$$

Lần lượt thay $x=y-6$; $x=6-y$ vào phương trình thứ nhất của hệ để tìm y.

Cuối cùng hệ phương trình đã cho có 2 nghiệm: $(-4;-2),(4;2)$.

Cách 2

Đặt $y=2t$. Hệ đã cho thành: $\begin{cases} x^4+16=16\left(t^4+16\right) \\ x^3-3x^2+4x=16\left(t^3-3t^2+4t\right) \end{cases}$ (I)

Nhân chéo hai PT trong hệ (I) ta được:

$$\left(x^4+16\right)\left(t^3-3t^2+4t\right)=\left(t^4+16\right)\left(x^3-3x^2+4x\right) \qquad (1).$$

Nếu $\left(x;t\right)$ là nghiệm của hệ (I) thì $xt\neq 0$. Chia cả hai vế của PT (1) cho $x^2t^2>0$ ta được:

$$\left(x^2+\frac{16}{x^2}\right)\left(t-3+\frac{4}{t}\right)=\left(t^2+\frac{16}{t^2}\right)\left(x-3+\frac{4}{x}\right) \qquad (2).$$

Đặt $u=x+\dfrac{4}{x}$; $v=t+\dfrac{4}{t}$ (Điều kiện: $|u|\geq 2,\ |v|\geq 2$).

Phương trình (2) trở thành:

$$\left(u^2-8\right)\left(v-3\right)=\left(v^2-8\right)\left(u-3\right)\Leftrightarrow u^2v-v^2u-3\left(u^2-v^2\right)+8\left(u-v\right)=0$$

$$\Leftrightarrow \left(u-v\right)\left[uv-3\left(u+v\right)+8\right]=0\Leftrightarrow \left(u-v\right)\left[\left(u-3\right)\left(v-3\right)-1\right]=0 \qquad (3)$$

Từ phương trình thứ nhất của hệ (I) ta suy ra: x và t cùng dấu. Từ điều kiện của u,v ở trên ta suy ra: u,v hoặc cùng ≥ 4 hoặc cùng ≤ -4. Suy ra: $u-3$, $v-3$ hoặc cùng ≥ 1 hoặc cùng ≤ -7.

Do đó: $\left(u-3\right)\left(v-3\right)-1\geq 0$. Từ (3) suy ra: $u=v$.

Khi đó

$$x+\frac{4}{x}=t+\frac{4}{t}\Leftrightarrow \left(x-t\right)+\left(\frac{4}{x}-\frac{4}{t}\right)=0\Leftrightarrow \left(x-t\right)\left(1-\frac{4}{xt}\right)=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=t \\ x=\dfrac{4}{t} \end{array}\right..$$

- Với $x=t$ thay vào phương trình thứ nhất của hệ (I) ta được

$$t^4+16=16\left(t^4+16\right) \text{, vô nghiệm.}$$

- Với $x=\dfrac{4}{t}$ thay vào phương trình thứ nhất của hệ (I) ta được:

$$\frac{256}{t^4}+16=16\left(t^4+16\right)\Leftrightarrow t^8+15t^4-16=0\Leftrightarrow \left(t^4-1\right)\left(t^4+16\right)=0\Leftrightarrow t^4=1\Leftrightarrow t=\pm 1.$$

Với $t=\pm 1$ ta tìm được các nghiệm của hệ phương trình đã cho: $\left(4;2\right),\left(-4;-2\right)$. ❐

Câu 3

Phương trình hoành độ giao điểm của (P) và d là

$$2ax^2 = 4x - 2a^2 \Leftrightarrow 2ax^2 - 4x + 2a^2 = 0 \quad (*)$$

d cắt (P) tại hai điểm phân biệt $A, B \Leftrightarrow$ phương trình (*) có 2 nghiệm phân biệt

$\Leftrightarrow \Delta > 0 \Leftrightarrow 1 - a^3 > 0 \Leftrightarrow 0 < a < 1$ (do kết hợp với $a > 0$).

Áp dụng định lí Viète cho phương trình (*) ta có

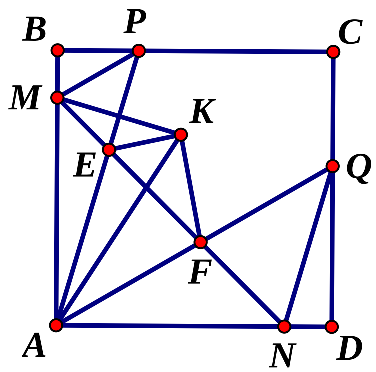
$$\begin{cases} x_1 + x_2 = \dfrac{2}{a} \\ x_1x_2 = a \end{cases}.$$

Khi đó

$$Q = \frac{8}{\frac{2}{a}} + \frac{1}{2a} = 4a + \frac{1}{2a} \geq 2\sqrt{4a.\frac{1}{2a}} = 2\sqrt{2}.$$

Vậy $\min Q = 2\sqrt{2} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 < a < 1 \\ 4a = \dfrac{1}{2a} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 < a < 1 \\ a = \pm\dfrac{1}{2\sqrt{2}} \end{cases} \Leftrightarrow a = \dfrac{1}{2\sqrt{2}}$. ❒

Câu 4



a) Do $PM // AQ$ và $QN // AP$ nên

$\widehat{MPA} = \widehat{PAQ} = \widehat{NQA} = 45^0$

$$\Rightarrow \widehat{PAB} = \widehat{NQD} \Rightarrow \triangle ABP \sim \triangle QDN \Rightarrow \frac{ND}{DQ} = \frac{BP}{AB} \Rightarrow ND = \frac{BP.DQ}{AB} \qquad (1)$$

$$\widehat{BPM} = \widehat{DAQ} \Rightarrow \triangle BPM \sim \triangle DAQ \Rightarrow \frac{MB}{BP} = \frac{QD}{QA} \Rightarrow MB = \frac{QD.BP}{DA} \qquad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra $ND = MB$ hay $AM = AN$.

Vậy $\triangle AMN$ cân tại A.

b) Gọi K là điểm đối xứng với M. Suy ra $AK = AM = AN$ và $\widehat{MAP} = \widehat{KAP}$.

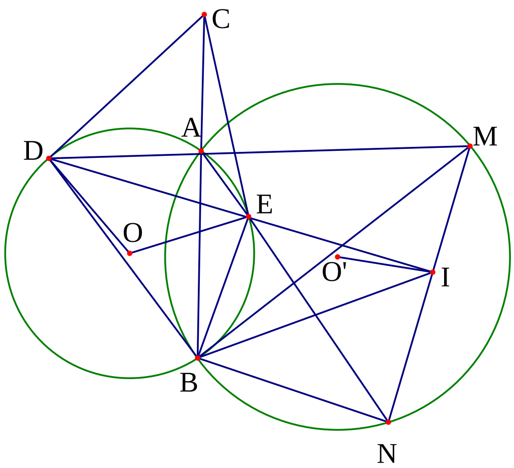
Mặt khác, $\widehat{MAP} + \widehat{QAN} = \widehat{KAP} + \widehat{QAK} = 45^0 \Rightarrow \widehat{QAN} = \widehat{QAK} \Rightarrow K$ và N đối xứng nhau qua $AQ \Rightarrow EM = EK, FK = FN$. Khi đó

$$\widehat{KEF} + \widehat{KFE} = \left(180^0 - \widehat{KEM}\right) + \left(180^0 - \widehat{KFN}\right) = 360^0 - 2\left(\widehat{MEP} + \widehat{NFQ}\right) = 90^0.$$

Suy ra $\widehat{EKF} = 90^0$.

Vậy theo định lí Pythagore thì $EF^2 = KE^2 + KF^2 = ME^2 + MF^2$. ❒

Câu 5



a) Ta có $\widehat{BAN} = \widehat{BMN}$ (cùng chắn $\overset{\frown}{BN}$) (1)

Do tứ giác $AMNB$ nội tiếp nên $\widehat{MNB} = \widehat{DAB} = \widehat{DEB}$ hay $\widehat{INB} = \widehat{DEB}$.

Do đó tứ giác $BEIN$ nội tiếp nên $\widehat{EBI} = \widehat{ENI}$ hay $\widehat{EBI} = \widehat{ANM} = \widehat{ABM} = \widehat{EBI}$.

Suy ra $\widehat{CBE} + \widehat{EBM} = \widehat{EBM} + \widehat{IBM} \Rightarrow \widehat{CBE} = \widehat{IBM}$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra $\triangle MIB \sim \triangle AEB$ (g – g).

b) Do CD là tiếp tuyến của đường tròn (O) nên $\widehat{CDA} = \widehat{CBD}$ suy ra $\triangle CDB \sim \triangle CAD$ (g – g) $\Rightarrow \dfrac{BD}{DA} = \dfrac{CD}{CA}$

Chứng minh tương tự ta có $\dfrac{CE}{CA} = \dfrac{EB}{EA}$

Mà $CD = CE$ (tính chất tiếp tuyến) nên $\dfrac{BD}{DA} = \dfrac{EB}{EA}$. (3)

Theo chứng minh trên, $\triangle MIB \sim \triangle AEB \Rightarrow \dfrac{EB}{EA} = \dfrac{IB}{MI}$ (4)

Lại có $\widehat{ABD}=\widehat{AED}=\widehat{IEN}$.

Do đó tứ giác $BNIE$ nội tiếp $\Rightarrow \widehat{IEN}=\widehat{IBN} \Rightarrow \widehat{ABD}=\widehat{IBN}$.

Mặt khác, theo chứng minh trên ta có $\widehat{INB}=\widehat{DAB}$

Suy ra $\triangle DBA \sim \triangle IBN \Rightarrow \dfrac{DB}{DA}=\dfrac{IB}{IN}$. (5)

Từ (3), (4) và (5) suy ra $\dfrac{IB}{MI}=\dfrac{IB}{IN} \Leftrightarrow MI=IN$.

Vậy $O'I \perp MN$. ❒

Câu 6

Ta có:

$ab+bc+ca=(a+b+c)(ab+bc+ca)=(a^2b+b^2c+c^2a)+(ab^2+bc^2+ca^2)+3abc$ Suy ra

$$\begin{aligned}a^2+b^2+c^2&=(a+b+c)^2-2(ab+bc+ca)=1-2(ab+bc+ca)\\&=1-2\left[(a^2b+b^2c+c^2a)+(ab^2+bc^2+ca^2)+3abc\right]\end{aligned}$$

Do đó:

$$\begin{aligned}P&=2(a^2b+b^2c+c^2a)+1-2\left[(a^2b+b^2c+c^2a)+(ab^2+bc^2+ca^2)+3abc\right]+4abc\\&=1-2(ab^2+bc^2+ca^2+abc)\end{aligned}$$

Không mất tính tổng quát có thể giả sử $a\le b\le c$.

Suy ra

$$\begin{aligned}&a(a-b)(b-c)\ge 0 \Rightarrow (a^2-ab)(b-c)\ge 0\\&\Rightarrow a^2b-a^2c-ab^2+abc\ge 0 \Rightarrow ab^2+ca^2\le a^2b+abc\end{aligned}$$

Do đó

$ab^2+bc^2+ca^2+abc=(ab^2+ca^2)+bc^2+abc\le (a^2b+abc)+bc^2+abc=b(a+c)^2$ Áp dụng bất đẳng thức $xyz\le\left(\dfrac{x+y+z}{3}\right)^3, \forall x,y,z>0$ ta có

$$b(a+c)^2=4b\left(\frac{a+c}{2}\right)\left(\frac{a+c}{2}\right)\le 4\left(\frac{b+\frac{a+c}{2}+\frac{a+c}{2}}{3}\right)^3=4\left(\frac{a+b+c}{3}\right)^3=\frac{4}{27}$$

Suy ra $P=1-2(ab^2+bc^2+ca^2+abc)\ge 1-2b(a+c)^2\ge 1-2.\dfrac{4}{27}=\dfrac{19}{27}$.

Vậy $\min P=\dfrac{19}{27} \Leftrightarrow a=b=c=\dfrac{1}{3}$. ❒

Câu 7

Nếu a,b chẵn thì a^2+b^2 là hợp số. Do đó nếu tập con X của A có hai phần tử phân biệt a,b mà a^2+b^2 là một số nguyên tố thì X không thể chỉ chứa các số chẵn. Suy ra: $k\geq 9$. Ta chứng tỏ $k=9$ là giá trị nhỏ nhất cần tìm. Điều đó có ý nghĩa là với mọi tập con X gồm 9 phần tử bất kỳ của A luôn tồn tại hai phần tử phân biệt a,b mà a^2+b^2 là một số nguyên tố. Để chứng minh khẳng định trên ta chia tập A thành các cặp hai phần tử phân biệt a,b mà a^2+b^2 là một số nguyên tố, ta có tất cả 8 cặp:

$$(1;4),(2;3),(5;8),(6;11),(7;10),(9;16),(12;13),(14;15).$$

Theo nguyên lý Dirichlet thì 9 phần tử của X ó hai phần tử cùng thuộc một cặp và ta có điều phải chứng minh. ❒

===Hết===

BỘ ĐỀ LUYỆN THI VÀO LỚP 10 CHUYÊN TOÁN
HƯỚNG DẪN GIẢI ĐỀ SỐ 5

Câu 1

a) Ta có

$$\left[\frac{(a+2b)^2-(2a+b)^2}{a+b}\right]:\left[\frac{\left(a\sqrt{a}+b\sqrt{b}\right)\left(a\sqrt{a}-b\sqrt{b}\right)}{a-b}-3ab\right]=3$$

$$\Leftrightarrow \frac{(a+2b-2a-b)(a+2b+2a+b)}{a+b}:$$

$$\left[\frac{\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)\left(a-\sqrt{ab}+b\right)\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)\left(a+\sqrt{ab}+b\right)}{a-b}-3ab\right]=3$$

$$\Leftrightarrow \frac{3(b-a)(a+b)}{a+b}:[(a+b)^2-ab-3ab]=3$$

$$\Leftrightarrow \frac{3(b-a)}{(a-b)^2} = 3 \Leftrightarrow b-a=1 \Leftrightarrow a=b-1.$$

Thay $a=b-1$ vào biểu thức S ta được

$$S = \frac{1+2ab-2(a^2+b^2)}{a^2+b^2} = \frac{1+2(b-1)b-2[(b-1)^2+b^2]}{(b-1)^2+b^2}$$

$$= \frac{1+2b^2-2b-4b^2+4b-2}{2b^2-2b+1} = \frac{-2b^2+2b-1}{2b^2-2b+1} = 1.$$ ❒

b) Đặt $ad=bc=t$. Ta có

$$a+d-b-c = \frac{t}{d}+d-\frac{t}{c}-c = (d-c)\left(1-\frac{t}{cd}\right) = (d-c)\left(1-\frac{a}{c}\right) > 0$$

$\Rightarrow a+d > b+c \Rightarrow a+d \ge b+c+1$.

Khi đó:

$$\left(\sqrt{d}-\sqrt{a}\right)^2 = d+a-2\sqrt{ad} \ge b+c+1-2\sqrt{bc} = \left(\sqrt{c}-\sqrt{b}\right)^2+1 \ge 1 \quad (*).$$

Kết hợp với giả thiết $\sqrt{d}-\sqrt{a} \le 1$, suy ra $\sqrt{d}-\sqrt{a}=1$.

Dấu đẳng thức ở (*) xảy ra khi và chỉ khi

$$\begin{cases} b=c \\ a+d=b+c+1 \end{cases} \Rightarrow a = 2b-d+1.$$

Ta có $ad=bc \Rightarrow a = \dfrac{bc}{d} = \dfrac{b^2}{d}$.

Suy ra $\dfrac{b^2}{d} = 2b-d+1 \Rightarrow (d-b)^2 = d$.

Khi đó $\sqrt{d}-\sqrt{a}=1 \Rightarrow \sqrt{a}=\sqrt{d}-1 = d-b-1 \Rightarrow a=(d-b-1)^2$.

Vậy a là số chính phương. ❒

Câu 2

a) Nhận thấy $x=0$ không phải là nghiệm của phương trình.

Với $x \ne 0$, chia cả hai vế của phương trình cho x^2 ta được:

$$x^2+x+2\sqrt[3]{\left(x-\frac{2}{x}\right)^2}+\frac{4}{x^2} = 6+\frac{2}{x}+\left(x-\frac{2}{x}+1\right)\sqrt[3]{x-\frac{2}{x}}$$

$$\Leftrightarrow \left(x-\frac{2}{x}\right)^2 - \left(x-\frac{2}{x}+1\right)\sqrt[3]{x-\frac{2}{x}} + \left(x-\frac{2}{x}\right) + 2\sqrt[3]{\left(x-\frac{2}{x}\right)^2} - 2 = 0 \qquad (*)$$

Đặt $t=\sqrt[3]{x-\frac{1}{x}}$. Phương trình (*) thành:

$$t^6-\left(t^3+1\right)t+t^3+2t^2-4=0 \Leftrightarrow t^6-t^4+t^3+2t^2-t-2=0$$

$$\Leftrightarrow \left(t^2-1\right)\left(t^4+t+2\right)=0 .$$

Vì $t^4+t+2=\left(t^2-\frac{1}{2}\right)^2+\left(t+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{5}{2}>0, \forall t\in\mathbb{R}$ nên $t^2-1=0 \Leftrightarrow t=\pm 1$.

- Với $t=1$ thì $\sqrt[3]{x-\frac{1}{x}}=1 \Leftrightarrow x^2-x-2=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-1 \\ x=2 \end{array}\right.$.
- Với $t=-1$ thì $\sqrt[3]{x-\frac{1}{x}}=-1 \Leftrightarrow x^2+x-2=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=-2 \end{array}\right.$.

Vậy tập nghiệm của phương trình đã cho là $S=\{-2;-1;1;2\}$. ❐

b) **Cách 1**

Điều kiện $x, y \neq 0$.

Đặt $u=\frac{1}{\sqrt[3]{x}},\ v=\frac{1}{\sqrt[3]{y}}$.

Hệ phương trình đã cho thành:

$$\begin{cases} u^3+v^3=9 \\ (u+v)(1+u)(1+v)=18 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (u+v)^3-3uv(u+v)=9 \\ (u+v)(1+u+v+uv)=18 \end{cases}.$$

Đặt $S=u+v, P=uv$. Điều kiện $S^2\geq 4P$.

Hệ phương trình trở thành

$$\begin{cases} S^3-3PS=9 \\ S(S+P+1)=18 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} S^3-3PS=9 & (1) \\ PS=18-S-S^2 & (2) \end{cases}$$

Thay (2) vào (1) ta được: $S^3+3S^2+3S-63=0 \Leftrightarrow (S+1)^3=64 \Leftrightarrow S=3 \Rightarrow P=2$.

Với $\begin{cases} S=3 \\ P=2 \end{cases}$ ta suy ra: u,v là nghiệm của phương trình:

$$X^2-3X+2=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} X=1 \\ X=2 \end{array}\right..$$

Khi đó $\begin{cases} u=1 \\ v=2 \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} u=2 \\ v=1 \end{cases}$. Suy ra: $\begin{cases} x=\dfrac{1}{8} \\ y=1 \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} x=1 \\ y=\dfrac{1}{8} \end{cases}$.

Vậy hệ phương trình đã cho có hai nghiệm là $\left(\dfrac{1}{8};1\right),\left(1;\dfrac{1}{8}\right)$.

Cách 2

Sử dụng hằng đẳng thức $(a+b+c)^3=a^3+b^3+c^3+3(a+b)(b+c)(c+a)$ ta có

$$\left(\frac{1}{\sqrt[3]{x}}+\frac{1}{\sqrt[3]{y}}+1\right)^3=\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+1+3\left(\frac{1}{\sqrt[3]{x}}+\frac{1}{\sqrt[3]{y}}\right)\left(\frac{1}{\sqrt[3]{x}}+1\right)\left(\frac{1}{\sqrt[3]{y}}+1\right)=9+1+3.18=64.$$

Suy ra $\dfrac{1}{\sqrt[3]{x}}+\dfrac{1}{\sqrt[3]{y}}=3$. Kết hợp với phương trình $\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}=9$ ta giải tương tự như cách ở trên và thu được 2 nghiệm là $\left(\dfrac{1}{8};1\right),\left(1;\dfrac{1}{8}\right)$. ❒

Câu 3

Do $A,B\in(P)$ có hoành độ lần lượt là -1 và 2 nên $A(-1;1),B(2;4)$.

Phương trình đường thẳng AB có dạng $y=ax+b$.

Đường thẳng này qua các điểm A và B nên ta có hệ phương trình

$$\begin{cases} 1=a.(-1)+b \\ 4=a.2+b \end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} a=1 \\ b=2 \end{cases}.$$

Do đó đường thẳng AB có phương trình là $y=x+2$.

Giả sử $M(x;x^2)\in(P)$ (với $-1\le x\le 2$).

Kẻ $AE\perp Ox, BF\perp Oy, MN\perp Ox, MK\perp Oy$.

Suy ra $AE=1, BF=4, MN=x^2, EN=x+1, EF=3, NF=2-x$.

$$S_{MAB}=S_{AEFB}-S_{AENM}-S_{MNFB}$$

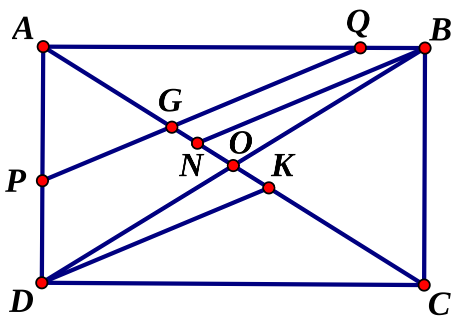
$$=\frac{1}{2}.(1+4).3-\frac{1}{2}(1+x^2)(1+x)-\frac{1}{2}.x^2(2-x)$$

$$=-\frac{3}{2}x^2+\frac{3}{2}x+3=\frac{27}{8}-\frac{3}{2}\left(x-\frac{1}{2}\right)^2\le\frac{27}{8}.$$

Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x=\dfrac{1}{2}$.

Vậy $\max S_{MAB}=\dfrac{27}{8}\Leftrightarrow M\in\overset{\frown}{AB}$ và $M\left(\dfrac{1}{2};\dfrac{1}{4}\right)$. ❒

Câu 4



a) Gọi O là giao điểm của AC và BD.

Ta có $\dfrac{GA}{GC}=\dfrac{1}{2}\Rightarrow\dfrac{GA}{2AO-GA}=\dfrac{1}{2}$

$\Rightarrow\dfrac{GA}{2(GA+GO)-GA}=\dfrac{1}{2}\Rightarrow\dfrac{GA}{GA+2GO}=\dfrac{1}{2}$

$\Rightarrow 2GA=GA+2GO\Rightarrow GA=2GO\Rightarrow G$ là trọng tâm của $\triangle ABD$.

Kẻ BN và DK lần lượt song song với PQ.

Khi đó

$$\frac{AD}{AP}=\frac{AK}{AG}\text{ và }\frac{AB}{AQ}=\frac{AN}{AG}.$$

Suy ra

$$\frac{AD}{AP}+\frac{AB}{AQ}=\frac{AK}{AG}+\frac{AN}{AG}=\frac{(AO+OK)+(AO-ON)}{AG}.$$

Dễ dàng chứng minh được $\triangle BNO=\triangle DKO$ (g – c – g) $\Rightarrow ON=OK$.

Do đó $\dfrac{AD}{AP}+\dfrac{AB}{AQ}=\dfrac{2AO}{AG}=3$.

Vậy biểu thức $\dfrac{AD}{AP}+\dfrac{AB}{AQ}$ có giá trị không đổi.

b) Ta có

$$S=S_{ABCD}-S_{APQ}=ab-\frac{1}{2}AP.AQ.$$

Với $AP=x$ ta có $\dfrac{AD}{AP}+\dfrac{AB}{AQ}=3\Leftrightarrow\dfrac{b}{x}+\dfrac{a}{AQ}=3\Rightarrow AQ=\dfrac{ax}{3x-b}$.

Suy ra

$$S = ab - \frac{1}{2}x.\frac{ax}{3x-b} = ab - \frac{ax^2}{6x-2b}.$$

Thay vào biểu thức M ta thu được

$$M = \frac{2}{3ab} + \sqrt{\frac{3}{a+1}}.$$

Do a,b lần lượt là chiều dài và chiều rộng của hình chữ nhật nên $a > b > 0$. Kết hợp với $a+b \le 3$ ta dự đoán giá trị nhỏ nhất của M đạt được tại $a=2, b=1$.

Từ $a+b \le 3$ suy ra $b+1 \le 4-a$; $0 < a < 3, 0 < b < 3$.

Ta có $(b+1)^2 \ge 4b > 0 \Rightarrow \frac{b+1}{b} \ge \frac{4}{b+1} \Rightarrow \frac{1}{b} \ge \frac{3-b}{b+1} \ge \frac{3-b}{4-a}$

$$\Rightarrow \frac{1}{ab} \ge \frac{3-b}{(4-a)a} = \frac{3-b}{4-(a-2)^2} \ge \frac{3-b}{4} \Rightarrow \frac{2}{3ab} \ge \frac{3-b}{6} \quad (\text{do } 0 \le (a-2)^2 < 1).$$

Áp dụng bất đẳng thức AM – GM cho hai số dương ta có

$$\sqrt{3(a+1)} \le \frac{3+a+1}{2} = \frac{a+4}{2} \le \frac{7-b}{2} \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{3(a+1)}} \ge \frac{2}{7-b} \Rightarrow \sqrt{\frac{3}{a+1}} \ge \frac{6}{7-b}.$$

Khi đó

$$M \ge \frac{3-b}{6} + \frac{6}{7-b} = \left(\frac{7-b}{6} + \frac{6}{7-b}\right) - \frac{2}{3} \ge 2\sqrt{\frac{7-b}{6}.\frac{6}{7-b}} - \frac{2}{3} = \frac{4}{3}.$$

Vậy $\min M = \frac{4}{3} \Leftrightarrow \begin{cases} b=1 \\ a+1=3 \\ \frac{7-b}{6} = \frac{6}{7-b} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=2 \\ b=1 \end{cases}$. ❒

Câu 6

a) Ta có

$\widehat{IBN} = \frac{1}{2}$sđ $\overset{\frown}{ED}$.

$\widehat{IAN} = \widehat{DAC} - \widehat{NAC} = \widehat{DCA} - \widehat{NCA} = \frac{1}{2}$(sđ $\overset{\frown}{AD}$ − sđ $\overset{\frown}{EA}$) = $\frac{1}{2}$sđ $\overset{\frown}{ED}$.

Suy ra $\widehat{IBN} = \widehat{IAN}$. Do đó tứ giác $IABN$ nội tiếp.

Ta có

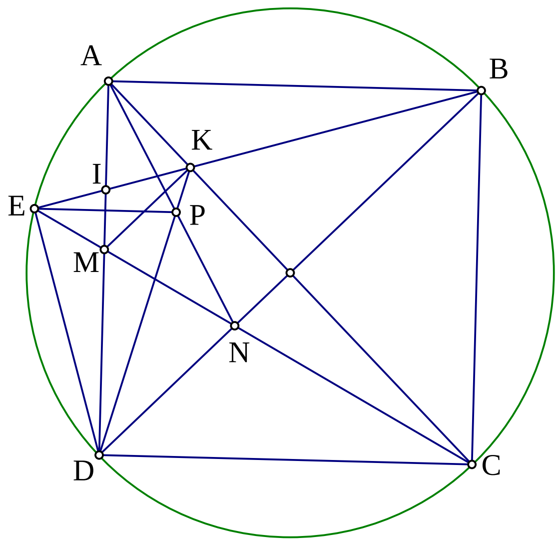
$\widehat{PNE} = \widehat{NAC} + \widehat{NCA} = 2\widehat{NCA} = \text{sđ}\,\overset{\frown}{EA}$.

$\widehat{PDE} = \widehat{PDA} + \widehat{ADE} = \widehat{ABE} + \widehat{ADE} = 2\widehat{ABE} = \text{sđ}\,\overset{\frown}{EA}$.

Suy ra $\widehat{PNE} = \widehat{PDE}$. Do đó tứ giác $PNDE$ nội tiếp.

Do $\widehat{MEK} = \widehat{MAK} = 45^0$ nên tứ giác $AKME$ nội tiếp

$\Rightarrow \widehat{MEA} = \widehat{MKA} = 90^0 \Rightarrow MK \perp AC \Rightarrow MK \parallel BD \Rightarrow \widehat{MKD} = \widehat{KDB} = \widehat{EKM}$.



b) Ta có $\triangle MDC \sim \triangle MEA \Rightarrow \dfrac{MD}{MC} = \dfrac{ME}{MA} \Leftrightarrow ME.MC = MD.MA = MD^2 = \dfrac{CD^2}{4}$.

Lại có $MC^2 = CD^2 + MD^2 = CD^2 + \dfrac{CD^2}{4} = \dfrac{5CD^2}{4}$

$\Rightarrow MC = \dfrac{\sqrt{5}}{2}CD \Rightarrow ME = \dfrac{\sqrt{5}}{10}CD$.

Suy ra $MC = 5ME$.

Khi đó $\dfrac{EA}{CD} = \dfrac{AM}{MC} \Rightarrow EA = \dfrac{AM.CD}{MC} = \dfrac{\dfrac{CD^2}{2}}{\dfrac{\sqrt{5}}{2}CD} = \dfrac{\sqrt{5}}{5}CD = \dfrac{\sqrt{10}}{5}R$.

Vậy $EA = \dfrac{\sqrt{10}}{5}R$. ❒

Câu 6

Đặt $x = a\left(b^2 + c^2\right), y = b\left(c^2 + a^2\right), z = c\left(a^2 + b^2\right)$ với $x, y, z > 0$.

Bất đẳng thức cần chứng minh thành

$$\sqrt{\frac{y+z}{x}} + \sqrt{\frac{z+x}{y}} + \sqrt{\frac{x+y}{z}} \geq 3\sqrt{2}\,.$$

Áp dụng bất đẳng thức AM – GM ta có:

$$\sqrt{\frac{y+z}{x}} + \sqrt{\frac{z+x}{y}} + \sqrt{\frac{x+y}{z}} \geq 3\sqrt[3]{\sqrt{\frac{y+z}{x}}.\sqrt{\frac{z+x}{y}}.\sqrt{\frac{x+y}{z}}} = 3\sqrt[3]{\sqrt{\frac{(x+y)(y+z)(z+x)}{xyz}}}$$

Lại áp dụng bất đẳng thức AM – GM ta có:

$$\frac{(x+y)(y+z)(z+x)}{xyz} \geq \frac{2\sqrt{xy}.2\sqrt{yz}.2\sqrt{zx}}{xyz} = 8\,.$$

Do đó

$$\sqrt{\frac{y+z}{x}} + \sqrt{\frac{z+x}{y}} + \sqrt{\frac{x+y}{z}} \geq 3\sqrt{\sqrt[3]{8}} = 3\sqrt{2}\,.$$

Dấu đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow x = y = z$ hay $a = b = c$. ❒

Câu 7

Giả sử hình vuông $ABCD$ có cạnh bằng 1. Khi chiếu đường tròn lên các cạnh của hình vuông ta được hình chiếu là các đoạn thẳng có độ dài bằng đường kính của đường tròn. Gọi đường kính của đường tròn thứ k là d_k và các hình chiếu là A_kB_k trên cạnh AB .

Ta có: $\pi\left(d_1 + d_2 + \ldots + d_n\right) = 10$ hay $\pi\left(A_1B_1 + A_2B_2 + \ldots + A_nB_n\right) = 10$

Suy ra: $A_1B_1 + A_2B_2 + A_nB_n = \dfrac{10}{\pi} > 3 = 3AB$.

Do tổng độ dài các đoạn thẳng A_kB_k lớn hơn 3 lần độ dài AB nên tồn tại một điểm nằm trên ít nhất 4 đoạn thẳng A_kB_k . Khi đó tồn tại một đường thẳng Δ qua điểm đã nêu, vuông góc với AB và luôn cắt ít nhất 4 đường tròn. ❒

===Hết===

BỘ ĐỀ LUYỆN THI VÀO LỚP 10 CHUYÊN TOÁN

HƯỚNG DẪN GIẢI ĐỀ SỐ 6

Câu 1

a) Do $x>1$ nên $\sqrt{4x-1}-1>0 \Rightarrow \sqrt{4x-\sqrt{16x-4}}=\sqrt{\left(\sqrt{4x-1}-1\right)^2}=\sqrt{4x-1}-1$.

Khi đó

$$\frac{(x+y)(x^3-y^3)\sqrt{4x-\sqrt{16x-4}}}{\left(1-\sqrt{4x-1}\right)(x^2y^2+xy^3+y^4)}=-2019 \Leftrightarrow \frac{(x+y)(x-y)(x^2+xy+y^2)}{y^2(x^2+xy+y^2)}=2019$$

$$\Leftrightarrow x^2-y^2=2019y^2 \Leftrightarrow x^2=2020y^2 \Leftrightarrow \frac{x^2}{y^2}=2020 \Leftrightarrow \frac{x}{y}=\pm\sqrt{2020}.$$

Do $x>1, y<0$ nên $\frac{x}{y}<0$. Vậy $\frac{x}{y}=-\sqrt{2020}$. ❒

b) Xét các trường hợp:

- Với $n=0$ ta có $n^7-n^5+2n^4+n^3-n^2+1=1$ (không thỏa mãn).
- Với $n=1$ ta có $n^7-n^5+2n^4+n^3-n^2+1=3$ (thỏa mãn).
- Xét $n\geq 2$ ta có $n^7-n^5+2n^4+n^3-n^2+1=(n^3-n+1)(n^4+n+1)$ (*)

Giả sử $n^7-n^5+2n^4+n^3-n^2+1$ có đúng một ước nguyên tố là p.

Vì $n\geq 2$ nên $n^4+n+1=n(n^3-n+1)+(n^2+1)>n^3-n+1>1$.

Suy ra tồn tại các số nguyên dương s,t sao cho $s>t$ và $\begin{cases} n^4+n+1=p^s \\ n^3-n+1=p^t \end{cases}$.

Ta có $n^2+1=(n^4+n+1)-n(n^3-n+1)=p^s-np^t=p^t(p^{s-t}-n)$

$$n^2+1 \,\vdots\, p^t \Rightarrow n^2+1\geq n^3-n+1 \Rightarrow n\left(n^2-n-1\right)\leq 0 \text{ (vô lý).}$$

Vậy $n=1$ thỏa yêu cầu bài toán. ❒

Câu 2

a) Điều kiện $x\neq -1$.

<u>Cách 1</u>

$$\sqrt{x^2+x+2}=\frac{x^2+5x+2}{2x+2} \Leftrightarrow 2x\sqrt{x^2+x+2}+2\sqrt{x^2+x+2}=x^2+5x+2$$

$$\Leftrightarrow 2x\sqrt{x^2+x+2}+2\sqrt{x^2+x+2}=\left(\sqrt{x^2+x+2}\right)^2+4x$$

$$\Leftrightarrow \left(2x\sqrt{x^2+x+2}-4x\right)+\left[2\sqrt{x^2+x+2}-\left(\sqrt{x^2+x+2}\right)^2\right]=0$$

$$\Leftrightarrow 2x\left(\sqrt{x^2+x+2}-2\right)-\sqrt{x^2+x+2}\left(\sqrt{x^2+x+2}-2\right)=0$$

$$\Leftrightarrow \left(\sqrt{x^2+x+2}-2\right)\left(2x-\sqrt{x^2+x+2}\right)=0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\sqrt{x^2+x+2}=2\\ \sqrt{x^2+x+2}=2x\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x^2+x-2=0\\ \begin{cases}x\ge 0\\ 3x^2-x-2=0\end{cases}\end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=1, x=-2\\ \begin{cases}x\ge 0\\ x=1, x=-\dfrac{2}{3}\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=1\\ x=-2\end{array}\right..$$

Vậy phương trình đã cho có nghiệm duy nhất $x=1$.

<u>Cách 2</u>

Đặt $t=\sqrt{x^2+x+1}>0$. Phương trình đã cho thành: $t^2-2(x+1)t+4x=0$ (*)

Ta có: $\Delta'=(x-1)^2\ge 0\Rightarrow$ phương trình (*) luôn có nghiệm. Nghiệm của nó là $t=2x,\ t=2$.

- Với $t=2x$ ta có $\sqrt{x^2+x+2}=2x\Leftrightarrow\begin{cases}2x\ge 0\\ 3x^2-x-2=0\end{cases}\Leftrightarrow x=1$.
- Với $t=2$ ta có $\sqrt{x^2+x+2}=2\Leftrightarrow x^2+x-2=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=1\\ x=-2\end{array}\right.$.

Vậy tập nghiệm của phương trình đã cho là $S=\{1;-2\}$.

b) Từ phương trình thứ hai của hệ suy ra $x+\dfrac{2}{x}>0\Rightarrow x>0\Rightarrow x^3+4>0$.

Do đó $x^2+2x-6\ge 0\Leftrightarrow x\ge\sqrt{7}-1$. Kết hợp với điều kiện: $x^3-6x+5\ge 0$ ta được: $x\ge\dfrac{\sqrt{21}-1}{2}$.

Áp dụng bất đẳng thức AM – GM ta có:

$$\sqrt{x^3-6x+5}=\sqrt{(x-1)(x^2+x-5)}\le\frac{(x-1)+(x^2+x-5)}{2}=\frac{x^2+2x-6}{2}.$$

và $x^2=\sqrt[3]{x^6}=\sqrt[3]{\frac{x^3}{2}.\frac{x^3}{2}.4}\le\frac{\frac{x^3}{2}+\frac{x^3}{2}+4}{3}=\frac{x^3+4}{3}$.

Suy ra: $6x^2\sqrt{x^3-6x+5}\le(x^2+2x-6)(x^3+4)$.

Khi đó phương trình đã cho tương đương với $\begin{cases}x-1=x^2+x-5\\ \frac{x^3}{2}=4\end{cases}\Leftrightarrow x=2$.

Thay $x=2$ vào phương trình thứ hai của hệ ta tìm được $y=\pm1$.

Vậy hệ phương trình đã cho có 2 nghiệm là: $(2;1),(2;-1)$. ❐

Câu 3

Gọi $y=ax+b$ là phương trình của đường thẳng d. Vì d đi qua $I(0;-2)$ và $M(m;0)$ nên có hệ phương trình

$$\begin{cases}-2=b\\0=am+b\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=\dfrac{2}{m}\\ b=-2\end{cases}.$$

Suy ra $d: y=\frac{2}{m}x-2$.

Phương trình hoành độ giao điểm của (P) và d là

$$-\frac{1}{2}x^2=\frac{2}{m}x-2\Leftrightarrow x^2+\frac{4}{m}x-4=0\quad (*).$$

Do $\Delta'=\frac{4}{m^2}+4>0,\forall m\ne0$ nên phương trình (*) có hai nghiệm phân biệt.

Điều này có nghĩa là d luôn cắt (P) tại hai điểm phân biệt A và B.

Giả sử $A\left(x_1;-\frac{x_1^2}{2}\right),B\left(x_2;-\frac{x_2^2}{2}\right)$.

Khi đó $AB^2=(x_2-x_1)^2+\left(\frac{x_1^2}{2}-\frac{x_2^2}{2}\right)^2=[(x_1+x_2)^2-4x_1x_2]\left[1+\frac{1}{4}(x_1+x_2)^2\right]$.

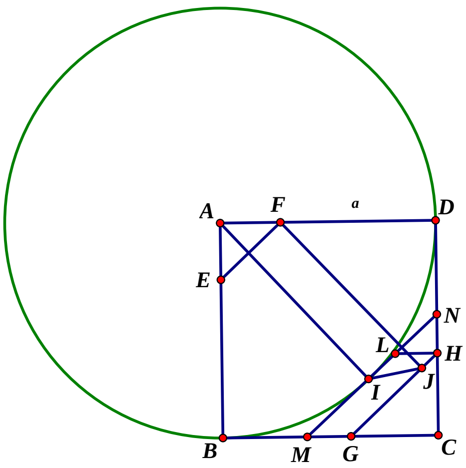
Theo định lí Vi-ét ta có

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = -\dfrac{4}{m}. \\ x_1 x_2 = -4 \end{cases}$$

Ta có $AB^2 = \left(\dfrac{16}{m^2} + 16\right)\left(1 + \dfrac{4}{m^2}\right) > 16$.

Do đó $AB > 4$. ❒

Câu 4



a) Dễ thấy $\triangle AEF \sim \triangle CHG$.

Suy ra: $\dfrac{HC}{AE} = \dfrac{GC}{AF}$.

Do $NH = AE$ và $MG = AF$ nên

$$\frac{HC}{NH} = \frac{GC}{MG} \text{ tức } GH // MN.$$

Qua H kẻ đường thẳng song song với AD cắt MN tại L.

Do $\triangle AEF = \triangle HNL$ nên ta có:

$AE = NH, AF = LH = MG, EF = LN, GH = ML$ Ta có

$$m_1 = AE + AF + EF, m_2 = HC + GC + GH.$$

Suy ra

$$m_1 + m_2 = AE + AF + EF + HC + GC + GH$$

$$= NH + HC + GC + MG + ML + LN$$

$$= NC + MC + MN.$$

Do đó tổng $m_1 + m_2$ là chu vi $\triangle MCN$.

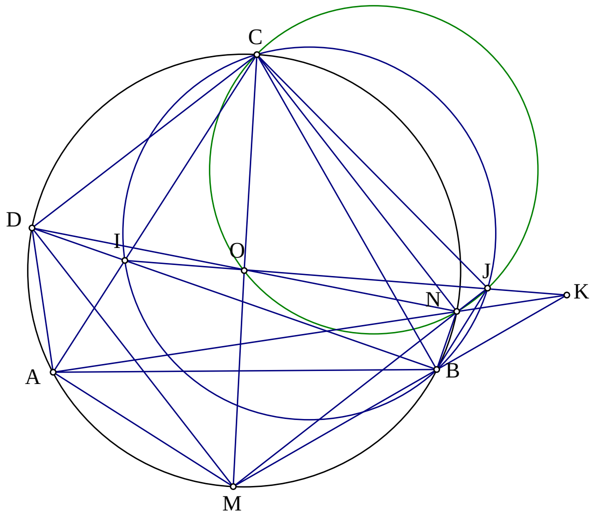
b) Từ F hạ đường thẳng vuông góc xuống GH cắt GH tại J, ta có $FJ = a$. Tương tự từ A hạ đường vuông góc xuống MN cắt MN tại I, ta có $FJ = AI = a$.

Điều này chứng tỏ MN là tiếp tuyến với đường tròn tâm A bán kính a.

Do đó chu vi $\triangle MCN$ bằng $BC + DC = 2a$.

Vậy $m_1 + m_2 = 2a$ là hằng số. ❒

Câu 5



a) Ta có

$\widehat{BJN} = \widehat{BJC} - \widehat{NJC}$

$= 180^0 - \widehat{BIC} - \left(180^0 - \widehat{NOC}\right)$

$= \widehat{NOC} - \widehat{BIC}$

Lại có

$\widehat{NOC} = \frac{1}{2}(\text{sđ}\,\overset{\frown}{DM} + \text{sđ}\,\overset{\frown}{NC})$

$\widehat{BIC} = \frac{1}{2}(\text{sđ}\,\overset{\frown}{BC} + \text{sđ}\,\overset{\frown}{AD})$

Từ đó suy ra

$$\widehat{BJN} = \frac{1}{2}(\text{sđ}\,\overset{\frown}{DM} + \text{sđ}\,\overset{\frown}{NC} - \text{sđ}\,\overset{\frown}{BC} - \text{sđ}\,\overset{\frown}{AD}).$$

Mặt khác

$$\widehat{NKB} = \frac{1}{2}(\text{sđ}\,\overset{\frown}{AM} - \text{sđ}\,\overset{\frown}{NB}) = \frac{1}{2}[(\text{sđ}\,\overset{\frown}{DM} - \text{sđ}\,\overset{\frown}{AD}) - (\text{sđ}\,\overset{\frown}{BC} - \text{sđ}\,\overset{\frown}{NC})].$$

$$= \frac{1}{2}(\text{sđ}\,\overset{\frown}{DM} + \text{sđ}\,\overset{\frown}{NC} - \text{sđ}\,\overset{\frown}{BC} - \text{sđ}\,\overset{\frown}{AD}).$$

Do đó $\widehat{BJN} = \widehat{NKB}$.

Vậy tứ giác $KBNJ$ nội tiếp.

b) Do tứ giác $KBNJ$ nội tiếp nên

$\widehat{NJK} + \widehat{NJO} = \widehat{NJK} + \widehat{NCM} = \widehat{NJK} + \widehat{NAM} = \widehat{NJK} + \widehat{NBK} = 180^0$ hay O, J, K thẳng hàng.

Lại có

$\widehat{KJB} + \widehat{IJB} = \widehat{KNB} + \widehat{BCI} = \widehat{KNB} + \widehat{BNA} = 180^0$ hay K, I, J thẳng hàng.

Vậy J, K, O thẳng hàng. ❐

Câu 6

Trước hết, nhân 4 vào hai vế và cộng mỗi phân số cho 1, ta có

$$\frac{(a+2)^2}{a^2+8} + \frac{(b+2)^2}{b^2+8} + \frac{(c+2)^2}{c^2+8} \geq \frac{3}{2}.$$

Không mất tính tổng quát, giả sử $ab \geq 0$ thì

$$a^2+b^2=(a+b)^2-2ab \leq (a+b)^2=c^2.$$

Theo bất đẳng thức Cauchy – Schwarz thì

$$\frac{(a+2)^2}{a^2+8}+\frac{(b+2)^2}{b^2+8} \geq \frac{(a+b+4)^2}{(a^2+b^2)+16} \geq \frac{(4-c)^2}{c^2+16}.$$

Do đó, ta chỉ cần đưa về chứng minh

$$\frac{(c-4)^2}{c^2+16}+\frac{(c+2)^2}{c^2+8} \geq \frac{3}{2} \Leftrightarrow c\left(\frac{-8}{c^2+16}+\frac{c+8}{2c^2+16}\right) \geq 0.$$

Quy đồng và phân tích thành nhân tử, ta có

$$\frac{c^2(c-4)^2}{(c^2+16)(2c^2+16)} \geq 0, \text{ luôn đúng.}$$

Vậy bất đẳng thức cần chứng minh là đúng.

Đẳng thức xảy ra khi $a=b=c=0$ hoặc $a=b=-2, c=4$ cùng các hoán vị. ❐

Câu 7

Giả sử tất cả các câu lạc bộ đều có không quá 8 học sinh.

Gọi N là số câu lạc bộ có hơn 1 học sinh.

Nếu $N>4$ thì từ 5 trong số các câu lạc bộ này, chọn mỗi câu lạc bộ 2 học sinh, khi đó 10 học sinh này không thỏa mãn điều kiện bài toán.

Nếu $N<4$, khi đó số học sinh tham gia các câu lạc bộ này không quá $3.8=24$, nghĩa là còn ít nhất $35-24=11$ học sinh, mỗi học sinh tham gia 1 câu lạc bộ mà câu lạc bộ này chỉ có 1 học sinh. Chọn 10 học sinh trong số này, không thỏa mãn điều kiện bài toán.

Do đó $N=4$.

Số học sinh tham gia 4 câu lạc bộ này không quá $4.8=32$, nghĩa là còn ít nhất 3 học sinh, mỗi học sinh tham gia 1 câu lạc bộ mà câu lạc bộ này chỉ có 1 học sinh.

Chọn 2 trong số học sinh này và mỗi câu lạc bộ trên chọn 2 học sinh, khi đó 10 học sinh không thỏa mãn điều kiện.

Vậy điều giả sử ở trên là sai, nghĩa là tồn tại một câu lạc bộ có ít nhất 9 học sinh tham gia. ❐

===Hết===

BỘ ĐỀ LUYỆN THI VÀO LỚP 10 CHUYÊN TOÁN

HƯỚNG DẪN GIẢI ĐỀ SỐ 7

Câu 1

a) Từ $x=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1}}=\frac{1}{2}\sqrt{\left(\sqrt{2}-1\right)^2}=\frac{\sqrt{2}-1}{2}$

ta suy ra $2x+1=\sqrt{2}$ hay $4x^2+4x-1=0$.

Khi đó

- $\sqrt{2x^2+2x}=\frac{1}{\sqrt{2}}$.
- $4x^5+4x^4-x^3+1=(4x^2+4x-1)x^3+1=1$.
- $4x^5+4x^4-5x^3+5x+3=(4x^2+4x-1)(x^3-x+1)+4=4$.
- $\frac{1-\sqrt{2}x}{\sqrt{2x^2+2x}}=\frac{1-\sqrt{2}x}{\frac{1}{\sqrt{2}}}=\sqrt{2}-2x=1$.

Vậy $P=1^{29}+\left(\sqrt{4}\right)^9+1^{2019}=514$. ❒

b) Nếu $n=1$ thì $x+3=x+2+1\mid x^2+4+1=x^2+5=\left(x+3\right)\left(x-3\right)+14$. Suy ra $x+3\mid 14$ hay $x\in\{4;11\}$.

Giả sử $n\geq 2$.

- Với $x\in\left\{1;2;3\right\}$ ta có:

$$1+2^n+1<1+2^{n+1}+1<2\left(1+2^n+1\right);$$

$$2^n+2^n+1<2^{n+1}+2^{n+1}+1<2\left(2^n+2^n+1\right);$$

$$2\left(3^n+2^n+1\right)<3^{n+1}+2^{n+1}+1<3\left(3^n+2^n+1\right).$$

  Do đó x^n+2^n+1 không chia hết $x^{n+1}+2^{n+1}+1$.

- Với $x\geq 4$ thì $x^n=\frac{x^n}{2}+\frac{x^n}{2}\geq\frac{2^{2n}}{2}+\frac{x^2}{2}$. Khi đó

$$\left(2^n+1\right)x\leq\frac{\left(2^n+1\right)^2+x^2}{2}=\frac{2^{2n}+2^{n+1}+1+x^2}{2}<2^{n+1}+x^n+2^n+2$$

  Do đó

$$\left(x-1\right)\left(x^n+2^n+1\right)=x^{n+1}+2^nx+x-x^n-2^n-1<x^{n+1}+2^{n+1}+1<x\left(x^n+2^n+1\right)$$

Lại thấy x^n+2^n+1 không chia hết $x^{n+1}+2^{n+1}+1$.

Vậy chỉ có 2 nghiệm là $\left(4;1\right),\left(11;1\right)$. ❒

Câu 2

a) Đặt $t=\sqrt[3]{4x-4}\Rightarrow x=\dfrac{t^3+4}{4}$; $x^2=\dfrac{t^6+8t^3+16}{16}$.

Phương trình đã cho trở thành

$$\frac{1}{6}\left(t^6+8t^3+16\right)-\frac{11}{4}\left(t^3+4\right)+21-3t=0$$

$$\Leftrightarrow t^6-14t^3-24t+96=0 \qquad (1)$$

$$\Leftrightarrow \left(t-2\right)^2\left(t^4+4t^3+12t^2+18t+24\right)=0 \qquad (2)$$

- Nếu $t\le 0$ thì $VT\left(1\right)>0$.
- Nếu $t>0$ thì $t^4+4t^3+12t^2+18t+24>0$. Từ (2) suy ra $t=2$. Khi đó: $\sqrt[3]{4x-4}=2\Leftrightarrow x=3$.

Vậy $x=3$ là nghiệm của phương trình đã cho. ❒

b) **<u>Cách 1</u>**

Đặt $x+y=u$; $x-y=v$. Ta có: $x=\dfrac{u+v}{2}$, $y=\dfrac{u-v}{2}$.

Hệ đã cho thành: $\begin{cases}u^3+v^3=-98\\-3u^2+5v^2=-9u-25v\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}u^3-27=-v^3-125 & (1)\\-3u^2+9u=-5v^2-25v & (2)\end{cases}$.

Nhân cả hai vế của phương trình (2) cho 3 rồi cộng với phương trình (1) theo từng vế ta được

$$\left(u-3\right)^3=-\left(v+5\right)^3\Leftrightarrow u=-v-2 \qquad (3).$$

Thay (3) vào (1) ta được:

$$v^2+2v-15=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}v=3\Rightarrow u=-5\\v=-5\Rightarrow u=3\end{array}\right..$$

- Với $\begin{cases}u=-5\\v=3\end{cases}$ ta được: $\begin{cases}x=-1\\y=-4\end{cases}$.

- Với $\begin{cases} u=3 \\ v=-5 \end{cases}$ ta được: $\begin{cases} x=-1 \\ y=4 \end{cases}$.

Vậy hệ phương trình đã cho có 2 nghiệm là: $(-1;-4),(-1;4)$.

Cách 2

Nhân hai vế của phương trình thứ hai của hệ với 3 rồi cộng với phương trình thứ nhất theo từng vế ta được:

$$x^3+3x^2+3xy^2-24xy+3y^2=24y-51x-49$$

$$\Leftrightarrow x^3+3x^2+3x+1+3y^2(x+1)-24y(x+1)+48(x+1)=0$$

$$\Leftrightarrow (x+1)\left[(x+1)^2+3y^2-24y+48\right]=0$$

$$\Leftrightarrow (x+1)\left[(x+1)^2+3(y-4)^2\right]=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-1 \\ \begin{cases} x=-1 \\ y=4 \end{cases} \end{array}\right.$$

Thay $x=-1$ vào phương trình thứ nhất của hệ ta được: $y=-4$ hoặc $y=4$.

Vậy hệ phương trình đã cho có 2 nghiệm là: $(-1;4),(-1;-4)$. ❒

Câu 3

Phương trình hoành độ giao điểm của (P) và d là

$$\frac{1}{3}x^2=-x+\frac{4}{3} \Leftrightarrow x^2+3x-4=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=-4 \end{array}\right..$$

Suy ra $A\left(1;\frac{1}{3}\right), B\left(-4;\frac{16}{3}\right)$.

$M\in Oy \Rightarrow M(0;m)$.

Ta có $MA+MB=\sqrt{1^2+\left(\frac{1}{3}-m\right)^2}+\sqrt{4^2+\left(m-\frac{16}{3}\right)^2}$.

Bổ đề: $\forall a,b\in\mathbb{R}$ ta có $\sqrt{a^2+b^2}+\sqrt{c^2+d^2}\geq\sqrt{(a+c)^2+(b+d)^2}$ (*).

Chứng minh:

Ta có

$$(*) \Leftrightarrow a^2+b^2+c^2+d^2+2\sqrt{(a^2+b^2)(c^2+d^2)}\geq(a+c)^2+(b+d)^2$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{(a^2+b^2)(c^2+d^2)} \geq ac+bd \Leftrightarrow (ac+bd)^2 \leq (a^2+b^2)(c^2+d^2)$$

(luôn đúng với bất đẳng thức Cauchy – Schwarz).

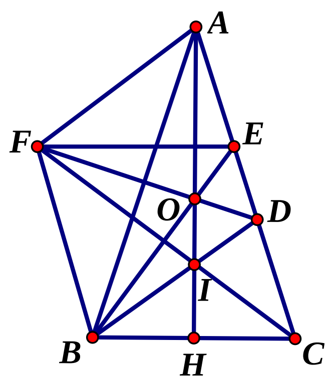
Áp dụng bổ đề này ta được $MA+MB \geq \sqrt{(1+4)^2+\left(\frac{1}{3}-m+m-\frac{16}{3}\right)} = 5\sqrt{2}$.

Dấu đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow \frac{1}{4} = \frac{\frac{1}{3}-m}{m-\frac{16}{3}} \Leftrightarrow m = \frac{4}{3}$.

Vậy với $M\left(0;\frac{4}{3}\right)$ thì $MA+MB$ đạt giá trị nhỏ nhất bằng $5\sqrt{2}$. ❐

Câu 4

a) Do $\triangle ABC$ cân tại A nên $\hat{B}=\hat{C}=\frac{180^0-36^0}{2}=72^0$.



Do BD là phân giác $\widehat{ABC}$ nên $\widehat{ABD}=\widehat{CBD}=36^0$.

$\triangle ABC$ cân tại A có AH là đường cao $\Rightarrow AH$ là phân giác $\widehat{BAC} \Rightarrow \widehat{CAH}=\widehat{BAH}=18^0$.

$\triangle ABD$ cân tại $D \Rightarrow \widehat{ADB}=180^0-2.36^0=108^0$.

DO là phân giác $\widehat{ADB}$ nên BE cũng là phân giác của $\widehat{ABD} \Rightarrow \widehat{EBD}=\widehat{ABE}=18^0$.

$$\begin{cases} \widehat{EBC}=\widehat{EBD}+\widehat{DBC}=18^0+36^0=54^0 \\ \widehat{BEC}=\widehat{ABE}+\widehat{BAE}=18^0+36^0=54^0 \end{cases} \Rightarrow \widehat{EBC}=\widehat{BEC}.$$

Suy ra $\triangle BCE$ cân tại C. Mà CI là phân giác $\widehat{BCE}$ nên CI là trung trực đoạn $BE \Rightarrow BF=EF$. Do đó $\triangle BEF$ cân tại F.

b) $\triangle ABD$ cân tại D có DO là phân giác $\widehat{ADB}$ nên DO là trung trực AB.

Suy ra $BF=AF=EF$. Do đó $\triangle FAE, \triangle FAB$ cân tại F.

Suy ra $\widehat{BAF}=\frac{180^0-\widehat{BFA}}{2}; \widehat{FAE}=\frac{180^0-\widehat{AFE}}{2}$.

Khi đó

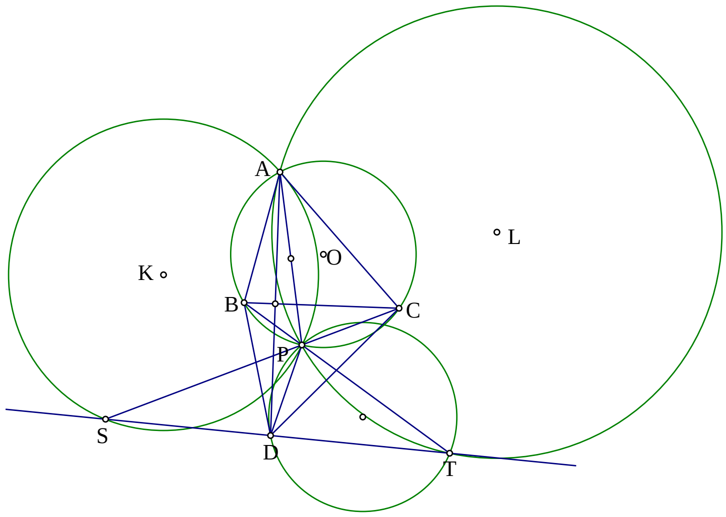
$$\widehat{BAC}=\widehat{FAE}-\widehat{BAF}=\frac{\widehat{BFA}-\widehat{AFE}}{2}=\frac{\widehat{BFE}}{2} \Rightarrow \widehat{BFE}=2.\widehat{BAC}=2.36^0=72^0$$

$\Rightarrow \widehat{BFC} = \widehat{EFC} = 36^0 \Rightarrow \triangle BCF$ cân tại B và $\triangle ECF$ cân tại E

$\Rightarrow BC = CE = EF = BF \Rightarrow BCEF$ là hình thoi.

Do $BD = BC$ nên $BD = DA = AF = BF$. Do đó $BDAF$ là hình thoi. ❒

Câu 5



a) Do A đối xứng với D qua BC nên ta có $BA = BD$.

Để ý rằng AB là tiếp tuyến của (L) nên $BA^2 = BT.BP \Rightarrow BD^2 = BT.BP$.

Suy ra BD là tiếp tuyến của đường tròn ngoại tiếp $\triangle DPT$.

b) Từ chứng minh ở câu a ta có $\triangle BDT \sim \triangle BPD \Rightarrow \widehat{BDT} = \widehat{BPD}$.

Chứng minh tương tự: $\widehat{CDS} = \widehat{CPD}$.

Ta có

$\widehat{SDB} + \widehat{BDT} = \widehat{SDC} - \widehat{BDC} + \widehat{BDT} = \widehat{CPD} - \widehat{BAC} + \widehat{BPD} = \left(\widehat{CPD} + \widehat{BPD}\right) - \widehat{BAC}$ Mặt khác ta có $\widehat{CPD} + \widehat{BPD} = 360^0 - \widehat{BPC}$.

Do tứ giác $ABPC$ nội tiếp nên $\widehat{BPC} + \widehat{BAC} = 180^0$

Vậy $\widehat{SDB} + \widehat{BDT} = 180^0$ hay 3 điểm S, D, T thẳng hàng. ❒

Câu 6

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy – Schwarz ta có

$$\left(b + \sqrt{ca} + c\right)^2 = \left(\sqrt{b}.\sqrt{b} + \sqrt{a}.\sqrt{c} + \sqrt{c}.\sqrt{c}\right)^2 \le (b + a + c)(b + c + c)$$

Khi đó

$$\frac{1}{\left(b+\sqrt{ca}+c\right)^2}\ge\frac{1}{\left(a+b+c\right)\left(b+2c\right)}$$

$$\Leftrightarrow\frac{2a^2+ab}{\left(b+\sqrt{ca}+c\right)^2}\ge\frac{2a^2+ab}{\left(a+b+c\right)\left(b+2c\right)}$$

$$\Leftrightarrow\frac{2a^2+ab}{\left(b+\sqrt{ca}+c\right)^2}\ge\frac{1}{\left(a+b+c\right)}\left(\frac{2a^2+ab}{b+2c}+a-a\right)$$

$$\Leftrightarrow\frac{2a^2+ab}{\left(b+\sqrt{ca}+c\right)^2}\ge\frac{1}{\left(a+b+c\right)}\left(\frac{2a^2+2ab+2ac}{b+2c}-a\right)$$

$$\Leftrightarrow\frac{2a^2+ab}{\left(b+\sqrt{ca}+c\right)^2}\ge\frac{2a}{b+2c}-\frac{a}{a+b+c}.$$

Tương tự

$$\frac{2b^2+bc}{\left(c+\sqrt{ab}+a\right)^2}\ge\frac{2b}{c+2a}-\frac{b}{a+b+c};\ \frac{2c^2+ca}{\left(a+\sqrt{bc}+b\right)^2}\ge\frac{2c}{a+2b}-\frac{c}{a+b+c}$$

Cộng vế theo vế các bất đẳng thức trên ta được

$$P\ge\frac{2a}{b+2c}+\frac{2b}{c+2a}+\frac{2c}{a+2b}-1=2\left(\frac{a^2}{ab+2ac}+\frac{b^2}{bc+2ba}+\frac{c^2}{ca+2cb}\right)-1$$

$$\ge\frac{2\left(a+b+c\right)^2}{3\left(ab+bc+ca\right)}-1.$$

Dễ thấy $\left(a+b+c\right)^2\ge3\left(ab+bc+ca\right)$ nên $P\ge1$.

Vậy $\min P=1$ khi và chỉ khi $a=b=c$. ❒

Câu 7

Giả sử $A=\left\{a_1,a_2,...,a_{101}\right\}$. Viết các số a_i dưới dạng: $a_i=2^{\alpha_i}.b_i$, trong đó b_i là số lẻ. Xét các số lẻ $b_1,b_2,...,b_{101}\in X$ và trong X chỉ có 100 số lẻ nên $b_i=b_j\left(i\ne j\right)$. Trong hai số a_i,a_j có một số là bội số kia. ❒

BỘ ĐỀ LUYỆN THI VÀO LỚP 10 CHUYÊN TOÁN

HƯỚNG DẪN GIẢI ĐỀ SỐ 8

Câu 1

a) Ta có

$$P=\left(\frac{1+\sqrt{x}}{1+\sqrt{xy}}+\frac{\sqrt{xy}+\sqrt{x}}{1-\sqrt{xy}}+1\right):\frac{2x\sqrt{y}+2\sqrt{xy}}{1-xy}$$

$$=\frac{\left(1+\sqrt{x}\right)\left(1-\sqrt{xy}\right)+\left(\sqrt{xy}+\sqrt{x}\right)\left(1+\sqrt{xy}\right)+1-xy}{\left(1+\sqrt{xy}\right)\left(1-\sqrt{xy}\right)}:\frac{2x\sqrt{y}+2\sqrt{xy}}{1-xy}$$

$$=\frac{2+2\sqrt{x}}{1-xy}:\frac{2x\sqrt{y}+2\sqrt{xy}}{1-xy}=\frac{2\left(1+\sqrt{x}\right)}{1-xy}.\frac{1-xy}{2\sqrt{xy}\left(\sqrt{x}+1\right)}=\frac{1}{\sqrt{xy}}.$$

Thay vào biểu thức Q ta được

$$Q=\frac{16xy}{x+y}.\frac{1}{\sqrt{xy}}+(x^2+y^2).\frac{1}{xy}=\frac{16\sqrt{xy}}{x+y}+\frac{x^2+y^2}{xy}.$$

<u>Cách 1</u>

Áp dụng bất đẳng thức AM – GM ta có

$$Q=\frac{8\sqrt{xy}}{x+y}+\frac{8\sqrt{xy}}{x+y}+\frac{(x+y)^2}{xy}-2\geq 2\sqrt[3]{\frac{8\sqrt{xy}}{x+y}.\frac{8\sqrt{xy}}{x+y}.\frac{(x+y)^2}{xy}}-2=10.$$

Do đó $\min Q=10$ khi và chỉ khi $x=y$.

<u>Cách 2</u>

Ta có

$$Q=\frac{16\sqrt{xy}}{x+y}-8+\frac{x^2+y^2}{xy}-2+10=\frac{(x-y)^2}{xy}-\frac{8\left(\sqrt{x}-\sqrt{y}\right)}{x+y}+10.$$

Ta sẽ chứng minh $\dfrac{(x-y)^2}{xy}-\dfrac{8\left(\sqrt{x}-\sqrt{y}\right)^2}{x+y}\geq 0$ (*).

Thật vậy, $(*) \Leftrightarrow (x+y)(x-y)^2 - 8xy\left(\sqrt{x}-\sqrt{y}\right)^2 \geq 0$

$$\Leftrightarrow (x+y)\left(\sqrt{x}-\sqrt{y}\right)^2\left(\sqrt{x}+\sqrt{y}\right)^2 - 8xy\left(\sqrt{x}-\sqrt{y}\right)^2 \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \left(\sqrt{x}-\sqrt{y}\right)^2[(x+y)\left(\sqrt{x}+\sqrt{y}\right)^2 - 8xy] \geq 0 \quad (**).$$

Áp dụng bất đẳng thức AM – GM ta có

$$(x+y)\left(\sqrt{x}+\sqrt{y}\right) - 8xy \geq 2\sqrt{xy}.\left(2\sqrt{\sqrt{x}.\sqrt{y}}\right)^2 - 8xy = 0.$$

Điều này có nghĩa là (**) luôn đúng, dẫn đến (*) luôn đúng.

Vậy $\min Q = 10$ khi và chỉ khi $x = y$.

Cách 3

Ta có

$$Q = \frac{16\sqrt{xy}}{x+y} + \frac{x^2+y^2}{xy} = \frac{\left(\sqrt{x}-\sqrt{y}\right)^4\left(4\sqrt{xy}+x+y\right)}{xy(x+y)} + 10 \geq 10 .$$

Vậy $\min Q = 10$ khi và chỉ khi $x = y$. ❐

b) Đặt $u = x^{2020}$; $v = y^{2020}$. Do $x, y \in \mathbb{Z}$ nên $u, v \in \mathbb{Z};\ u, v \geq 0$.

Khi đó phương trình đã cho thành $v^3 = u^3 - u^2 - u + 2$.

Ta có: $v^3 = u^3 - u^2 - u + 2 = \left(u-1\right)^3 + 2\left(u-1\right)^2 + 1 > \left(u-1\right)^3$.

$$v^3 = u^3 - u^2 - u + 2 = \left(u+2\right)^3 - \left(7u+6\right)\left(u+1\right) < \left(u+2\right)^3.$$

Suy ra: $\left(u-1\right)^3 < v^3 < \left(u+2\right)^3 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} v^3 = u^3 \\ v^3 = \left(u+1\right)^3 \end{array}\right.$.

- **Trường hợp 1**: $v^3 = u^3$. Suy ra: $u = v = 1$; $u = v = 2$.
  - Với $u = v = 1$ ta có: $x = y = \pm 1$
  - Với $u = v = 2$ không có $x, y \in \mathbb{Z}$.
- **Trường hợp 2**: $v^3 = \left(u+1\right)^3 \Rightarrow \left(u+1\right)^3 = u^3 - u^2 - u + 2 \Leftrightarrow 4u^2 + 4u - 1 = 0$. Phương trình này vô nghiệm trong $\mathbb{Z}$.

Vậy các cặp số nguyên $(x; y)$ cần tìm là $(1;1), (-1;1), (1;-1), (-1;-1)$. ❐

Câu 2

a) Điều kiện: $x \ge -3$.

Biến đổi phương trình đã cho tương đương với

$$4\left(\sqrt{x+3}-2\right)+2\left(\sqrt{2x+7}-3\right)=x^3+5x^2+6x-12$$

$$\Leftrightarrow \frac{4(x-1)}{\sqrt{x+3}+2}+\frac{4(x-1)}{\sqrt{2x+7}+3}=(x-1)(x^2+6x+12)$$

$$\Leftrightarrow (x-1)\left(\frac{4}{\sqrt{x+3}+2}+\frac{4}{\sqrt{2x+7}+3}-(x+3)^2-3\right)=0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ \dfrac{4}{\sqrt{x+3}+2}+\dfrac{4}{\sqrt{2x+7}+3}=(x+3)^2+3 \quad (*) \end{array}\right.$$

Vì $x \ge -3$ nên $\sqrt{x+3} \ge 0$ và $\sqrt{2x+7} \ge 1$.

Suy ra $VT(*)=\dfrac{4}{\sqrt{x+3}+2}+\dfrac{4}{\sqrt{2x+7}+3} \le 3$.

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $x=-3$.

Vậy tập nghiệm của phương trình đã cho là $S=\{-3;1\}$. ❐

b) Điều kiện: $x \ge 0, y \ge 0$.

Áp dụng bất đẳng thức AM – GM ta có

$$6=\sqrt{3x^4+6x^3y}+\sqrt{3y^4+6xy^3}=x\sqrt{3x^2+6xy}+y\sqrt{3y^2+6xy}$$

$$\ge 2\sqrt{xy\sqrt{(3x^2+6xy)(3y^2+6xy)}}$$

$$=2\sqrt{3xy\sqrt{5x^2y^2+2xy(x^2+y^2)}} \ge 2\sqrt{3xy\sqrt{5x^2y^2+4x^2y^2}}=2\sqrt{3xy.\sqrt{9x^2y^2}}=6xy.$$

Suy ra $xy \le 1$. (1)

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $x=y$.

Lại áp dụng bất đẳng thức AM – GM ta có

$$6=\sqrt{3x^4+6x^3y}+\sqrt{3y^4+6xy^3}=\frac{x.\sqrt{9x}.\sqrt{3x+6y}}{3}+\frac{y.\sqrt{9y}.\sqrt{3y+6x}}{3}$$

$$\le \frac{x(12x+6y)}{6}+\frac{y(12y+6x)}{6}=2(x^2+y^2+xy)$$

$$=4+4xy-(\sqrt{x}+\sqrt{y}) \le 4+4xy-2\sqrt[4]{xy}.$$

Suy ra $4xy-2\sqrt[4]{xy}-2 \ge 0 \Rightarrow 2xy-\sqrt[4]{xy}-1 \ge 0 \Rightarrow 2xy-\sqrt[4]{xy} \ge 1 \ge xy$

$\Rightarrow xy \geq \sqrt[4]{xy} \Rightarrow x^4y^4 \geq xy$

Rõ ràng $xy > 0$, bởi vì $xy = 0 \Leftrightarrow x = 0$ hoặc $y = 0$ sẽ dẫn đến điều vô lý.

Suy ra $x^3y^3 \geq 1 \Rightarrow xy \geq 1$ (2)

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $x = y$.

Từ (1) và (2) suy ra $xy = 1 \Leftrightarrow x = y = 1$ (thỏa mãn điều kiện $x \geq 0, y \geq 0$).

Vậy hệ phương trình đã cho có nghiệm duy nhất là: $(1;1)$. ❒

Câu 3

Phương trình hoành độ giao điểm của (P) và d là

$$-x^2 = 2x - 3 \Leftrightarrow x^2 + 2x - 3 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ x = -3 \end{array}\right..$$

Do đó d cắt (P) tại hai điểm $A(1;-1), B(-3;-9)$.

Gọi $M(m;-m^2)$ $(-3 < m < 1)$ nằm trên $\overset{\frown}{AB}$ của (P) ($M \neq A, M \neq B$).

Gọi I là trung điểm AB, suy ra $I(-1;-5)$.

$\triangle MAB$ vuông tại M

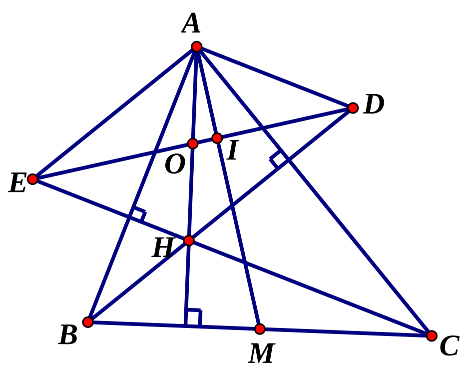
$\Leftrightarrow IM = IA = \sqrt{20} \Leftrightarrow \sqrt{(m+1)^2 + (-m^2+5)^2} = \sqrt{20}$

$\Leftrightarrow m^4 - 9m^2 + 2m + 6 = 0 \Leftrightarrow (m-1)(m+3)(m^2 - 2m - m) = 0$ (*)

Giải phương trình (*) và so với điều kiện $-3 < m < 1$ ta thu được $m = 1 - \sqrt{3}$.

Vậy $M\left(1-\sqrt{3}; 2\sqrt{3} - 4\right)$ thỏa mãn yêu cầu bài toán. ❒

Câu 4



a) Ta có

$\widehat{HEA} = \widehat{BHE}$ (so le trong)

$\widehat{BAC} = \widehat{BHE}$ (cùng phụ với $\widehat{ABH}$).

Suy ra $\widehat{HEA} = \widehat{BAC}$.

Lại có $\widehat{AHE} = \widehat{ABC}$ (cùng phụ với $\widehat{BAH}$).

Do đó $\triangle EHA \sim \triangle ABC$.

Điều này dẫn đến $\dfrac{EH}{AB} = \dfrac{HA}{BC} = \dfrac{AE}{CA} = \dfrac{EH + HA + AE}{AB + BC + CA} = \dfrac{p_1}{p_2}$.

b) Gọi $O = DE \cap AH, I = DE \cap AM$. Do tứ giác $ADHE$ có $AE // BH$, $AD // EH$ nên nó là hình bình hành. Suy ra O là trung điểm AH.

Do $\triangle EHA \sim \triangle ABC$ nên $\frac{AE}{CA} = \frac{AH}{CB} = \frac{2AO}{2CM} = \frac{AO}{CM}$.

Mặt khác, $AE // DH$ và $DH \perp BC$ nên $EA \perp AC$.

Xét $\triangle AEO$ và $\triangle CAM$ có $\widehat{EAO} = \widehat{ACM}$ và $\frac{AE}{CA} = \frac{AO}{CM}$.

Do đó $\triangle AEO \sim \triangle CAM$ (c – g – c) $\Rightarrow \widehat{AEO} = \widehat{CAM}$.

Ta có $\widehat{AEI} + \widehat{EAI} = \widehat{CAM} + \widehat{EAI} = \widehat{EAC} = 90^0 \Rightarrow \triangle IAE$ vuông tại I.

Vậy $DE \perp AM$. ❒

Câu 5

a) Do AI là tiếp tuyến chung của các đường tròn $(O_1),(O_2)$ nên

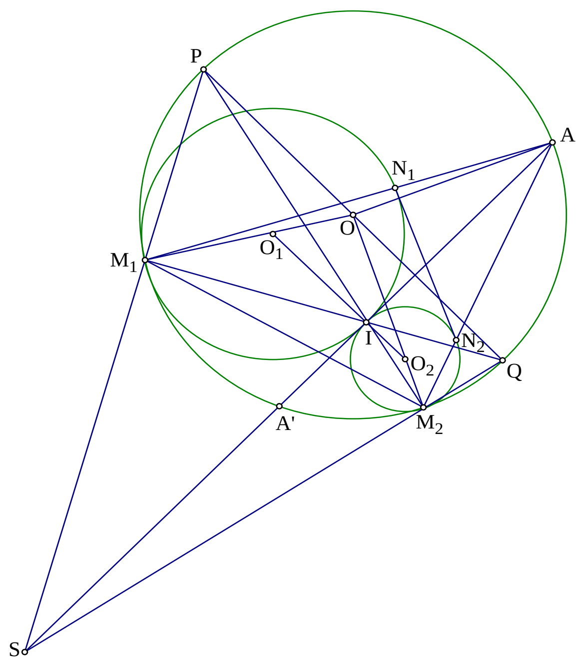
$$AN_1.AM_1 = AI^2 = AN_2.AM_2$$

Suy ra tứ giác $N_1M_1N_2M_2$ nội tiếp.

Để chứng minh $OA \perp N_1N_2$ ta chứng minh $\widehat{AN_1N_2} + \widehat{OAM_1} = 90^0$.

Thật vậy, do tứ giác $N_1M_1N_2M_2$ nội tiếp ta suy ra $\widehat{AN_1N_2} = \widehat{N_2M_2M} = \frac{1}{2}\widehat{M_1OA}$.

Do đó $\widehat{AN_1N_2} + \widehat{OAM_1} = \frac{1}{2}\widehat{M_1OA} + \frac{1}{2}\left(\widehat{OAM_1} + \widehat{OM_1A}\right) = 90^0$ (do $\triangle M_1OA$ cân tại O). Vậy $OA \perp N_1N_2$.



b) Ta có $AI \perp PQ \Rightarrow PQ // O_1O_2$. Gọi $S = PM_1 \cap QM_2$ thì O, O_2, M_2 thẳng hàng và O_2I // $OP \Rightarrow \widehat{O_2IM_2} = \widehat{M_2PO}$.

Mặt khác ta có: $\widehat{O_2IM_2} = \widehat{IM_2O_2} \Rightarrow \widehat{M_2PO} = \widehat{O_2IM_2}$. Suy ra P, I, M_2 thẳng hàng .

Tương tự Q, I, M_1 thẳng hàng. Mà PQ là đường kính của (O) nên $QM_1 \perp M_1P, QM_2 \perp M_2P$. Suy ra I là trực tâm $\triangle SPQ$ hay AI qua S.

Vậy ba đường thẳng AI, PM_1, QM_2 đồng quy tại I. ❐

Câu 6. Do $abc > 0$ nên bất đẳng thức đã cho tương đương với

$$\frac{abc}{a^3+8abc} + \frac{abc}{b^3+8abc} + \frac{abc}{c^3+8abc} \le \frac{1}{3}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{\frac{a^2}{bc}+8} + \frac{1}{\frac{b^2}{ca}+8} + \frac{1}{\frac{c^2}{ab}+8} \le \frac{1}{3}$$

Đặt $x = \frac{a^2}{bc}, y = \frac{b^2}{ca}, z = \frac{c^2}{ab}$ với $xyz = 1$. (1)

Bất đẳng thức (1) trở thành

$$\frac{1}{x+8} + \frac{1}{y+8} + \frac{1}{z+8} \le \frac{1}{3} \qquad (2)$$

Ta sẽ chứng minh bất đẳng (2).

Ta có

$$(2) \Leftrightarrow 3[(xy+yz+zx)+16(x+y+z)+192] \le xyz+8(x+y+z)+512$$

$$\Leftrightarrow 5(xy+yz+zx)+16(x+y+z) \ge 63 \quad (\text{do } xyz=1). \qquad (3)$$

Áp dụng bất đẳng thức AM – GM ta có

$$xy+yz+zx \ge 3\sqrt[3]{(xyz)^2} = 3 \text{ và } x+y+z \ge 3\sqrt[3]{xyz} = 3.$$

Do đó ta chứng minh xong bất đẳng thức (3).

Dấu đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow x = y = z = 1$ hay $a = b = c$. ❐

Câu 7. Giả sử ba điểm đã cho là A, B, C và a là độ dài cạnh lớn nhất của $\triangle ABC$. Ta có: $abc = 4rS$. Hơn nữa dễ thấy $2S \in \mathbb{Z}$ nên $S \ge \frac{1}{2}$.

Suy ra: $abc \ge 2r \Rightarrow a^3 \ge 2r > r \Rightarrow a > \sqrt[3]{r}$. ❐

BỘ ĐỀ LUYỆN THI VÀO LỚP 10 CHUYÊN TOÁN

HƯỚNG DẪN GIẢI ĐỀ SỐ 9

Câu 1

a) $P=\dfrac{2\sqrt{a}+\sqrt{b}}{\sqrt{ab}+2\sqrt{a}-\sqrt{b}-2}-\dfrac{2-\sqrt{ab}}{\sqrt{ab}+2\sqrt{a}+\sqrt{b}+2}$

$$=\frac{2\sqrt{a}+\sqrt{b}}{\left(\sqrt{a}-1\right)\left(\sqrt{b}+2\right)}-\frac{2-\sqrt{ab}}{\left(\sqrt{a}+1\right)\left(\sqrt{b}+2\right)}$$

$$=\frac{\left(2\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)\left(\sqrt{a}+1\right)-\left(2-\sqrt{ab}\right)\left(\sqrt{a}-1\right)}{(a-1)\left(\sqrt{b}+2\right)}$$

$$=\frac{a+1}{a-1}.$$

Ta có $P=1+\dfrac{2}{a-1}$.

- Nếu $a=0$ thì $P=-1$.
- Nếu $a=2$ thì $P=3$.
- Nếu $a>2$ thì $P<3$.

Vậy $\max P=3$ khi và chỉ khi $a=2$. ❐

b) Xét các trường hợp sau

- **Trường hợp 1:** Nếu $m=n$ thì ta có ngay điều phải chứng minh.
- **Trường hợp 2:** Nếu $m\neq n$ thì đặt $\begin{cases} m+n=2x \\ m-n=2y \end{cases}$ $(x,y\in\mathbb{Z};x>0;y\neq 0)$.

Khi đó $\begin{cases} m=x+y \\ n=x-y \end{cases}$ và từ $x+y>0;x-y>0$ suy ra $x>|y|$.

Do $n^2-1\,\vdots\,\left|m^2-n^2+1\right|\Rightarrow m^2\,\vdots\,\left|m^2-n^2+1\right|\Rightarrow m^2=k\left(m^2-n^2+1\right),\ k\in\mathbb{Z}$ (1)

Ta có $(1)\Leftrightarrow (x+y)^2=k\left(4xy+1\right)\Leftrightarrow x^2-2(2k-1)xy+(y^2-k)=0$ (*)

Phương trình (*) có một nghiệm nguyên là x nên có một nghiệm nữa là x_1.

Ta có $\begin{cases} x+x_1=2(2k-1) \\ xx_1=y^2-k \end{cases}\Rightarrow x_1\in\mathbb{Z}$.

- Với $x_1 > 0$ thì (x_1, y) là cặp nghiệm thỏa mãn (*), suy ra $x_1 > |y|$.

  Khi đó $y^2 - k = xx_1 > |y|^2 = y^2 \Rightarrow k < 0$.

  Suy ra $0 < x + x_1 = 2(2k-1) < 0$, mâu thuẫn.

- Với $x_1 < 0$ thì $xx_1 = y^2 - k < 0 \Rightarrow k > y^2 \Rightarrow k > 0 \Rightarrow 4xy + 1 > 0 \Rightarrow y > 0$.

  Ta có $k = x_1^2 - 2(2k-1)x_1 y + y^2 = x_1^2 + 2(2k-1)|x_1| y + y^2$.

  Suy ra $k > 2(2k-1)|x_1| y \geq 2(2k-1) > k$, mâu thuẫn.

  Do đó $x_1 = 0$. Khi đó $k = y^2$ và $\dfrac{m^2}{k} = m^2 - n^2 + 1$ là số chính phương.

Vậy $|m^2 + n^2 - 1|$ là số chính phương. ❐

Câu 2

a) Điều kiện: $\begin{cases} 1 - \dfrac{1}{x} \geq 0 \\ x - \dfrac{1}{x} \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x \geq 1 \\ -1 \leq x < 0 \end{array}\right.$ (*)

Đặt $t = \sqrt{1 - \dfrac{1}{x}}$ (điều kiện $t \geq 0$), thì phương trình đã cho trở thành

$$t^2 - \left(1 + 3\sqrt{x+1}\right)t + 2x = 0 \qquad (1) \text{ (coi là phương trình bậc hai ẩn } t\text{)}$$

Ta có

$$\Delta = \left(1 + 3\sqrt{x+1}\right)^2 - 8x = x + 10 + 6\sqrt{x+1} = \left(\sqrt{x+1} + 3\right)^2 \geq 0, \forall x \text{ thỏa mãn (*)}$$

Do đó, nghiệm phương trình (1) là:

$$t = 2(\sqrt{x+1} + 1);\ \ t = \sqrt{x+1} - 1.$$

- **Trường hợp 1:** Với $t = 2(\sqrt{x+1} + 1)$ ta có: $\sqrt{1 - \dfrac{1}{x}} = 2(\sqrt{x+1} + 1)$ vô nghiệm vì $VT < 1 < VP$, với mọi x thỏa mãn (*).
- **Trường hợp 2:** Với $t = \sqrt{x+1} - 1$ ta có: $\sqrt{1 - \dfrac{1}{x}} = \sqrt{x+1} - 1 \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 1 \\ 1 - \dfrac{1}{x} = x + 1 - 2\sqrt{x+1} + 1 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 1 \\ x^2 + x + 1 - 2x\sqrt{x+1} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 1 \\ \left(\sqrt{x+1} - x\right)^2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 1 \\ \sqrt{x+1} - x = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \ge 1 \\ x+1 = x^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \ge 1 \\ x = \dfrac{1 \pm \sqrt{5}}{2} \end{cases} \Leftrightarrow x = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \text{ (thỏa mãn (*)).}$$

Vậy phương trình đã cho có một nghiệm $x = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$. ❒

b) Điều kiện $x - y + 3 \ge 0$ (*). Biến đổi phương trình thứ hai

$$\begin{aligned} &\left(x^2 + x\right)\sqrt{x - y + 3} = 2\left(x^2 + x\right) - \left(x - y - 1\right) \\ &\Leftrightarrow \left(x^2 + x\right)\left(\sqrt{x - y + 3} - 2\right) + x - y - 1 = 0 \\ &\Leftrightarrow \left(x - y - 1\right)\left(\frac{x^2 + x}{\sqrt{x - y + 3} + 2} + 1\right) = 0 \end{aligned}$$

Vì $\dfrac{x^2 + x}{\sqrt{x - y + 3} + 2} + 1 = \dfrac{\left(x^2 + x + 2\right) + \sqrt{x - y + 3}}{\sqrt{x - y + 3} + 2} > 0$ nên $y = x - 1$.

Thay vào phương trình ban đầu, biến đổi:

$$(x+1)\sqrt{x^2 - x + 2} + (x-2)\sqrt{x^2 + x + 1} = 2x - 1 \quad (1)$$

Đặt $a = \sqrt{x^2 - x + 2},\ b = \sqrt{x^2 + x + 1}$, khi đó $x = \dfrac{v^2 - u^2 + 1}{2}$ và

$$\begin{aligned} &(1) \Leftrightarrow \left(\frac{v^2 - u^2 + 1}{2} + 1\right)u + \left(\frac{v^2 - u^2 + 1}{2} - 2\right)v = v^2 - u^2 \\ &\Leftrightarrow (v - u)(u + v + 1)(u + v - 3) = 0 \end{aligned}$$

Vì $u + v + 1 > 0$ nên có hai trường hợp sau xảy ra

- **Trường hợp 1:** $u = v$. Ta có

$$\sqrt{x^2 - x + 2} = \sqrt{x^2 + x + 1} \Leftrightarrow x = \frac{1}{2} \Rightarrow y = -\frac{1}{2} \text{ (thỏa điều kiện (*)).}$$

- **Trường hợp 2:** $u + v = 3$. Ta có $x = \dfrac{v^2 - u^2 + 1}{2} = \dfrac{3(v - u) + 1}{2} \Rightarrow v - u = \dfrac{2x - 1}{3}$.

  Kết hợp với $u + v = 3$ suy ra $3v = x + 4$. Khi đó

$$\sqrt{x^2 + x + 1} = x + 4 \Leftrightarrow 8x^2 + x - 7 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{aligned} &x = -1 \Rightarrow y = -2 \\ &x = -\frac{7}{8} \Rightarrow y = -\frac{1}{8} \end{aligned}\right.$$

Vậy hệ phương trình đã cho có 3 nghiệm là: $\left(\frac{1}{2};-\frac{1}{2}\right);(-1;-2);\left(\frac{7}{8};-\frac{1}{8}\right)$. ❒

Câu 3

Giả sử phương trình OA có dạng $y=mx$. Do $OB\perp OA$ nên phương trình OB có dạng $y=-\frac{1}{m}x$ (với $m\neq 0$).

$A=OA\cap(P)\Rightarrow A\left(\frac{3}{2}m;\frac{3}{2}m^2\right)$; $B=OB\cap(P)\Rightarrow B\left(-\frac{3}{2m};\frac{3}{2m^2}\right)$.

Phương trình đường thẳng AB là $y=\frac{m^2-1}{m}x+\frac{3}{2}$.

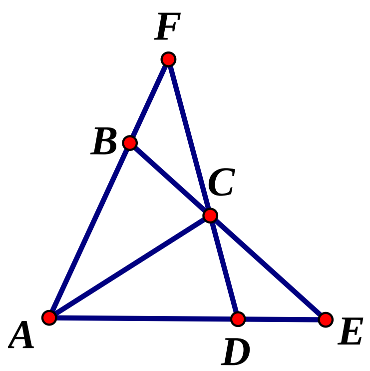
Rõ ràng đường thẳng AB đi qua điểm cố định $I\left(0;\frac{3}{2}\right)$.

Do $\widehat{OHI}=90^0$ nên H thuộc đường tròn đường kính OI.

Ta có $OH\le OI$. Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow AB\perp OI\Leftrightarrow m^2-1=0\Leftrightarrow m=\pm1$.

Do đó $A\left(\frac{3}{2};\frac{3}{2}\right),B\left(-\frac{3}{2};\frac{3}{2}\right)$ hoặc $A\left(-\frac{3}{2};\frac{3}{2}\right),B\left(\frac{3}{2};\frac{3}{2}\right)$. ❒

Câu 4

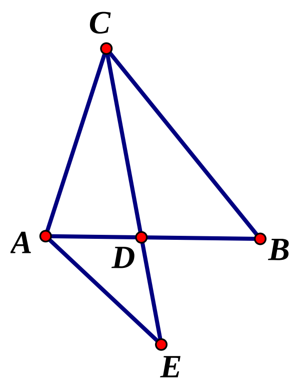


a) Ta có $\widehat{BAC}+\widehat{CBA}=\widehat{ECA}\Rightarrow\widehat{ECD}=\widehat{BAC}$.

Do $\triangle CDE\sim\triangle ACE$ nên $\frac{CE}{DE}=\frac{AE}{CE}$.

Do AC là phân giác $\widehat{BAD}$ nên $\frac{AE}{CE}=\frac{AB}{BC}$.

Do đó $\frac{AB}{BC}=\frac{CE}{DE}$ hay $AB.DE=BC.CE$.



b) **Bổ đề:** Cho $\triangle ABC$ có phân giác CD. Khi đó $CD^2<CA.CB$.

Chứng minh:

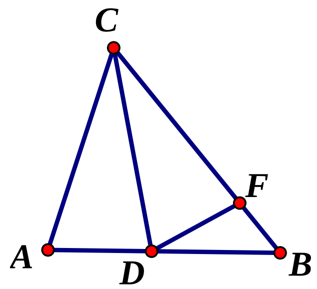
Cách 1

Do $\widehat{CDB}>\widehat{CAB}$ nên trên tia đối của tia DC lấy điểm E sao cho $\widehat{CAE}=\widehat{CDB}$.

$\triangle CAE \sim \triangle CDB$ (g – g) $\Rightarrow \dfrac{CA}{CD} = \dfrac{CE}{CB} \Rightarrow CD.CE = CA.CB$.

Do $CD < CE$ nên $CD^2 < CA.CB$.

Cách 2



Do $\widehat{CDB} > \widehat{CAB}$ nên ta có thể lấy điểm F trên CB sao cho $\widehat{CDF} = \widehat{CAB}$.

$\triangle CAD \sim \triangle CDF$ (g – g) $\Rightarrow \dfrac{CA}{CD} = \dfrac{CF}{CD} \Rightarrow CD^2 = CA.CF$.

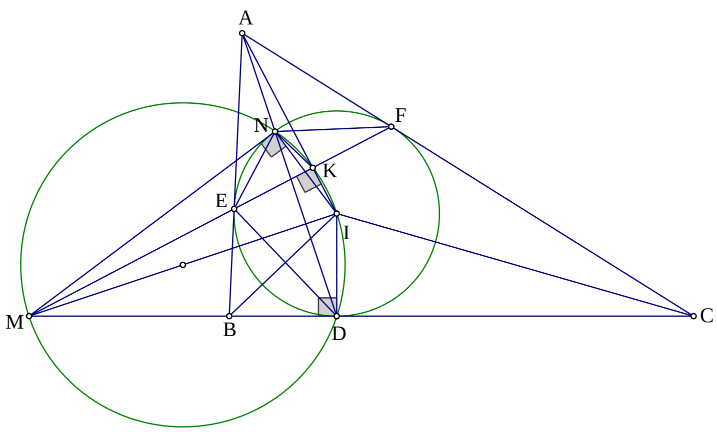
Mà $CF < CB$ nên $CD^2 < CA.CB$.

Áp dụng bổ đề trên cho bài toán, ta thấy AC vừa là phân giác của $\triangle ADF$ vừa là phân giác của $\triangle ABE$ nên

$$AC^2 < AD.AF \text{ và } AC^2 < AB.AE.$$

Suy ra $AC^2 < \dfrac{1}{2}(AD.AF + AB.AE)$. ❒

Câu 5



a) Nối N với F, D với F. Xét ΔANF và AFD có:

$\widehat{AFN} = \widehat{ADF}$ (vì AF là tiếp tuyến) và $\widehat{FAD}$ chung

$\Rightarrow \Delta ANF \sim \Delta AFD$ (g.g) $\Rightarrow \dfrac{AN}{AF} = \dfrac{AF}{AD} \Leftrightarrow AF^2 = AN.AD$ (1)

Xét ΔAFI có $AF \perp IF$ (do AF là tiếp tuyến, FI là bán kính) và $FK \perp AI$ (do AF và AE là tiếp tuyến chung và AI nối tâm) $\Rightarrow \Delta AFI$ vuông tại F có FK là đường cao)

$\Rightarrow AK.AI = AF^2$ (2)

Xét ΔANK và ΔAID có $\widehat{IAD}$ chung.

Từ (1) và (2) suy ra $AN.AD = AK.AI \Rightarrow \dfrac{AN}{AK} = \dfrac{AI}{AD}$

$\Rightarrow \Delta ANK \sim \Delta AID$ (c.g.c) $\Rightarrow \widehat{NKA} = \widehat{IDN}$ (3)

Từ (3) có $\widehat{IDN} + \widehat{DKN} = \widehat{NKA} + \widehat{DKN} = 180^0$ $\Rightarrow$ tứ giác $DIKN$ nội tiếp đường tròn.

Vậy các điểm I, D, N, K cùng thuộc đường tròn.

b) Ta có $ID \perp DM$ (DM là tiếp tuyến, DI là bán kính) và $IK \perp KM$ (câu a)

$\Rightarrow$ Tứ giác $DIKM$ nội tiếp đường tròn đường kính MI. Vì bốn điểm D, I, K, N cùng thuộc một đường tròn (do câu a)) nên hai đường tròn này ngoại tiếp ΔDIK $\Rightarrow$ hai đường tròn trùng nhau $\Rightarrow N$ cũng nằm trên đường tròn đường kính MI $\Rightarrow \widehat{INM} = 90^0$.

Vì IN là bán kính đường tròn (I), $MN \perp IN$ nên MN là tiếp tuyến của đường tròn (I) tại tiếp điểm N. ❐

Câu 6.

Với $a+b+c \le \dfrac{1}{4}$ thì $\dfrac{1+4a}{1-4a} = \dfrac{\frac{1}{4}+a}{\frac{1}{4}-a} \le \dfrac{a+b+c+a}{a+b+c-a} = \dfrac{2a+b+c}{b+c}$. Thật vậy,

$\dfrac{1+4a}{1-4a} \le \dfrac{2a+b+c}{b+c} \Leftrightarrow (b+c)+4a(b+c) \le 2a+b+c-4a(2a+b+c)$

$\Leftrightarrow 2a[1-4(a+b+c)] \ge 0$ (Bất đẳng thức luôn đúng).

Khi đó $\sum\limits_{cyc}\dfrac{1+4a}{1-4a} - 6 \le \sum\limits_{cyc}\dfrac{2a+b+c}{b+c} - 6 = \sum\limits_{cyc}\left(\dfrac{2a+b+c}{b+c} - 2\right) = \sum\limits_{cyc}\dfrac{a-b+a-c}{b+c}$

$= \sum\limits_{cyc}\dfrac{a-b}{b+c} + \sum\limits_{cyc}\dfrac{a-c}{b+c} = \sum\limits_{cyc}\dfrac{a-b}{b+c} + \sum\limits_{cyc}\dfrac{b-a}{c+a} = \sum\limits_{cyc}(a-b)\left(\dfrac{1}{b+c} - \dfrac{1}{c+a}\right) = \sum\limits_{cyc}\dfrac{(a-b)^2}{(c+a)(c+b)}$ Lại có $\dfrac{1}{c}\left(\dfrac{\sqrt{a}-\sqrt{b}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}\right)^2 = \dfrac{1}{c}.\dfrac{(a-b)^2}{\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)^4} = \dfrac{(a-b)^2}{\left(\sqrt{ca}+\sqrt{cb}\right)^2\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)^2}$ (1)

Theo bất đẳng thức Cauchy-Schwarz có $\left(\sqrt{ca}+\sqrt{cb}\right)^2 \le (c+a)(c+b)$ (2)

Có $\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}\right)^2 \le 3(a+b+c) = \dfrac{3}{4} < 1$ nên $\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c} < 1$.

Suy ra $\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)^2 < 1$ (3)

Từ (1), (2) và (3) dẫn đến $\frac{1}{c}\left(\frac{\sqrt{a}-\sqrt{b}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}\right)^2 \geq \frac{\left(a-b\right)^2}{\left(c+a\right)\left(c+b\right)}$

Tương tự, suy ra được $\sum_{cyc}\frac{\left(a-b\right)^2}{\left(c+a\right)\left(c+b\right)} \leq \sum_{cyc}\frac{1}{c}\left(\frac{\sqrt{a}-\sqrt{b}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}\right)^2$, dẫn tới điều cần chứng minh. ❒

Câu 7

Từ giả thiết suy ra nếu các máy bay từ ccác sân bay M và N đến sân bay O thì khoảng cách MN là lớn nhất trong các cạnh của $\triangle MON$, do đó $\widehat{MON} > 60^o$.

Giả sử rằng các máy bay bay từ các sân bay $M_1, M_2, ..., M_n$ đến sân bay O thì một trong các góc $\widehat{M_iON_j}$ không lớn hơn $\frac{360^o}{n}$ với $i, j, n \in \{1;2;...;80\}$ vì tổng các góc đã cho bằng 360^o.

Vậy $\frac{360^o}{n} > 60^0 \Rightarrow n < 6$. Suy ra điều phải chứng minh.

===Hết===

BỘ ĐỀ LUYỆN THI VÀO LỚP 10 CHUYÊN TOÁN

HƯỚNG DẪN GIẢI ĐỀ SỐ 10

Câu 1

a) Đặt $x = \sqrt{\frac{a-1}{3}}$. Suy ra $a = 3x^2 + 1$ và $\frac{a+8}{3} = x^2 + 3$.

Khi đó

$$\begin{aligned}P &= \sqrt[3]{3x^2+1+(x^2+3)x} + \sqrt[3]{3x^2+1-(x^2+3)x}\\ &= \sqrt[3]{x^3+3x^2+3x+1} + \sqrt[3]{1-3x+3x^2-x^3}\\ &= \sqrt[3]{(x+1)^3} + \sqrt[3]{(1-x)^3}\\ &= (x+1)+(1-x) = 2.\ ❒\end{aligned}$$

b) Đặt $A = \sqrt[3]{\frac{x^3-3x+\left(x^2-1\right)\sqrt{x^2-4}}{2}} + \sqrt[3]{\frac{x^3-3x-\left(x^2-1\right)\sqrt{x^2-4}}{2}} > 0$

Suy ra

$$A^3 = x^3 - 3x + 3A \Rightarrow (A - x)(A^2 + x^2 + Ax - 3) = 0.$$

Do $x > 2 \Rightarrow x^3 - 3 > 0$ và $A > 0$ nên $A^2 + x^2 + Ax - 3 > 0$. Do đó: $A = x$.

Phương trình đã cho thành:

$$8x = y^2 - z^2 + 16 \Leftrightarrow (x-4)^2 - z^2 = x^2 - y^2.$$

Do $2 \le y < x$ và $x \in \mathbb{Z}^+$ nên ta có các trường hợp sau:

- Nếu $x \in \{3;4;5\}$ thì do $0 < 2 \le y < x$ nên suy ra: $x^2 - y^2 > 0$; vì z nguyên dương nên $z \ge 1$ suy ra: $(x-4)^2 - z^2 \le 0$. Vì thế ứng với $x \in \{3;4;5\}$ thì phương trình đã cho không có nghiệm nguyên dương.
- Nếu $x \ge 6$, vì $y < x$ nên khi $x \ge 6$ thì $y \le 5$ ta luôn có $x^2 - y^2 \ge 6^2 - 5^2 = 11$.

Do vậy $(x-4)^2 - z^2 \ge 11 \Rightarrow (x-4)^2 > 11 \Rightarrow x \ge 8$. Mà $x < 10$ nên $x \in \{8;9\}$.

- Với $x = 8$, ta có: $y^2 - z^2 = 48$. Dễ dàng suy ra: $y = 7; z = 1$.
- Với $x = 9$ ta có: $y^2 - z^2 = 56$. Phương trình này vô nghiệm nguyên.

Vậy phương trình đã cho có nghiệm là: $(x;y;z) = (8;7;1)$. ❐

Câu 2

a) Điều kiện: $x \ge -\dfrac{5}{4}$. Đặt $y = x^2 + x - 1$. Phương trình đã cho trở thành

$$y^2 + y - 1 = \frac{-1 + \sqrt{4x+5}}{2}$$

Đặt $z = \dfrac{-1 + \sqrt{4x+5}}{2}$ (với $z \ge -\dfrac{1}{2}$). Biến đổi phương trình về dạng

$$z^2 + z - 1 = x$$

Khi đó ta xây dựng được hệ phương trình

$$\begin{cases} x^2 + x - 1 = y \\ y^2 + y - 1 = z \\ z^2 + z - 1 = x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x(x+1) = y + 1 \\ y(y+1) = z + 1. \\ z(z+1) = x + 1 \end{cases}$$

Vì $z \ge -\dfrac{1}{2}$ nên $y \ne -1, x \ne -1$.

Nhân các vế tương ứng của 3 phương trình ta được $xyz=1$.

Mặt khác, cộng các vế tương ứng của 3 phương trình cho nhau và áp dụng bất đẳng thức AM – GM ta được

$$3=x^2+y^2+z^2\geq 3\sqrt[3]{x^2y^2z^2}\Rightarrow x^2y^2z^2\leq 1$$

Do đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow$ $x^2=y^2=z^2=1\Leftrightarrow x=y=z=1$ (do x,y,z khác -1)

Vậy phương trình đã cho có nghiệm duy nhất $x=1$. ❒

b) Điều kiện: $x+y\geq 0$. Đặt $u=\sqrt{x+y};u\geq 0$.

Phương trình thứ nhất của hệ trở thành $\sqrt{u^2+1}+1=4u^4+\sqrt{3}u\Leftrightarrow\sqrt{u^2+1}-\sqrt{3}u=4u^4-1$

$$\Leftrightarrow\frac{u^2+1-3u^2}{\sqrt{u^2+1}+\sqrt{3}u}=(2u^2-1)(2u^2+1)$$

$$\Leftrightarrow(2u^2-1)\left(\frac{1}{\sqrt{u^2+1}+\sqrt{3}u}+2u^2+1\right)=0$$

$\Leftrightarrow 2u^2-1=0$. Suy ra $2x+2y=1$.

Kết hợp với phương trình thứ hai trong hệ đã cho ta có

$$\begin{cases}2x+2y=1\\2019x-2y=2020\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=1\\y=-\dfrac{1}{2}\end{cases}.$$

Vậy hệ phương trình đã cho có nghiệm duy nhất $\left(1;-\dfrac{1}{2}\right)$. ❒

Câu 3

d qua $I(0;2)$ và có hệ số góc $-\dfrac{2}{m}$ nên có phương trình là $y=-\dfrac{2}{m}x+2$.

Phương trình hoành độ giao điểm của (P) và d là

$$\frac{1}{2}x^2=-\frac{2}{m}x+2\Leftrightarrow mx^2+4x-4m=0\quad(*)$$

Do $\dfrac{c}{a}=-4<0$ nên phương trình luôn có 2 nghiệm trái dấu với mọi m. Điều này có nghĩa là d luôn cắt (P) tại 2 điểm A,B nằm về hai phía đối với trục Oy.

Gọi x_A,x_B lần lượt là hoành độ các điểm A,B. Khi đó

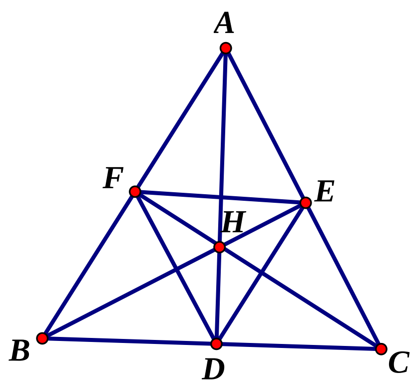
$$AB^2=(x_B-x_A)^2+(y_B-y_A)^2>(x_B-x_A)^2=(x_A+x_B)^2-4x_Ax_B\ge -4x_Ax_B=16.$$

Suy ra $AB>4$.

$$y_A^2+y_B^2>2y_Ay_B=2.\frac{1}{2}x_A^2.\frac{1}{2}x_B^2=\frac{1}{2}(x_Ax_B)^2=8$$

(Lưu ý không thể xảy ra dấu đẳng thức ở vì $y_A\ne y_B$). ❒

Câu 4



a) Do $\triangle AEB$ và $\triangle AFC$ có $\widehat{A}$ chung nên

$\triangle AEB\sim\triangle AFC$ (g – g) $\Rightarrow \dfrac{AE}{AB}=\dfrac{AF}{AC}$

$\Rightarrow \triangle AEF\sim\triangle ABC$ (c – g – c) $\Rightarrow \widehat{AFE}=\widehat{ACB}$.

Tương tự, $\widehat{BFD}=\widehat{ACB}$.

Suy ra $\widehat{AFE}=\widehat{BFD}\Rightarrow\widehat{CFE}=\widehat{CFD}$ hay FC là tia phân giác $\widehat{DFE}$.

Tương tự, $\widehat{FDA}=\widehat{EDA}$

hay DA là tia phân giác $\widehat{FDE}$.

Do đó H là tâm đường tròn nội tiếp tam giác DEF.

b) $\triangle AEF\sim\triangle ABC\Rightarrow \dfrac{S_{AEF}}{S_{ABC}}=\left(\dfrac{AE}{AB}\right)^2$

$\triangle DBF\sim\triangle ABC\Rightarrow \dfrac{S_{DBF}}{S_{ABC}}=\left(\dfrac{DB}{AB}\right)^2$.

Do $S_{AEF}=S_{DBF}$ nên $AE=DB$.

Từ đó $\triangle AEB=\triangle BDA$ (cạnh huyền – cạnh góc vuông) $\Rightarrow \widehat{BAC}=\widehat{ABC}$.

Tương tự, $\widehat{BAC}=\widehat{ACB}$.

Vậy $\triangle ABC$ là tam giác đều. ❒

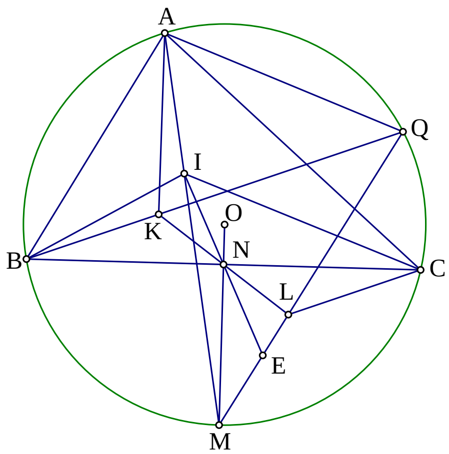
Câu 5

Ta có $\widehat{NCE}=\widehat{IBN}=\dfrac{1}{2}\widehat{B}<\dfrac{1}{2}\widehat{A}=\widehat{NCM}$. Do đó E nằm trong góc $\widehat{NCM}$ (1)

Do $\widehat{B}>\widehat{C}$ nên N và C nằm về cùng một phía đối với AM.

Do đó E và C nằm về cùng một phía đối với AM (2)

Từ (1) và (2) suy ra E nằm trong $\widehat{AMC}$. Vậy Q thuộc cung nhỏ $\overset{\frown}{AC}$.



b) Vì $QK = QA$ (3) nên

$\widehat{QAK} = \widehat{AKQ} = \frac{1}{2}\widehat{A} + \frac{1}{2}\widehat{B} \Rightarrow \widehat{IAK} + \widehat{CAQ} = \frac{1}{2}\widehat{B} = \widehat{IBK} + \widehat{CBQ}$.

Mặt khác, $\widehat{CAQ} = \widehat{CBQ}$ nên $\widehat{CAQ} = \widehat{IBK}$ hay tứ giác $AIKB$ nội tiếp. Từ đó ta có $\widehat{IKQ} = \widehat{BAI} = \frac{1}{2}\widehat{A} = \widehat{KQM}$. Suy ra $KI // MQ$.

Gọi L là giao điểm của KN và MQ, khi đó $KILE$ là hình bình hành. Suy ra N là trung điểm của KL. Do đó $BKCL$ là một hình bình hành. Mặt khác ta có $BK // CL$, $BK = CL$ và $\widehat{CLQ} = \widehat{BLQ} = \widehat{CQM}$ (4) nên $CL = QC$ (5).

Từ (4) và (5) suy ra $BK = CL$ (6).

Từ (3) và (6) ta có $BQ = QA + QC$. ❒

Câu 6

Ta có $ab + bc + ca = 3abc \Leftrightarrow \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = 3.$

Đặt $x = \frac{1}{a}; y = \frac{1}{b}; z = \frac{1}{c}$. Khi đó $x, y, z > 0$; $x + y + z = 3$ và biểu thức P trở thành

$$P = \frac{x}{1+2z^2} + \frac{y}{1+2x^2} + \frac{z}{1+2y^2}.$$

Áp dụng bất đẳng thức AM – GM ta có

$$\frac{x}{1+2z^2} = x - \frac{2xz^2}{1+2z^2} \geq x - \frac{2xz^2}{3\sqrt[3]{z^4}} = x - \frac{2}{3}.x\sqrt[3]{z^2} \geq x - \frac{2}{9}x\left(1+2z\right) = \frac{7}{9}x - \frac{4}{9}xz.$$

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $z = 1$.

Tương tự, $\frac{y}{1+2x^2} \geq \frac{7}{9}y - \frac{4}{9}xy$. Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $x = 1$.

$$\frac{z}{1+2y^2} \geq \frac{7}{9}z - \frac{4}{9}yz.$$ Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $y=1$.

Cộng ba bất đẳng thức trên vế theo vế, ta có:

$$P \geq \frac{7}{9}(x+y+z) - \frac{4}{9}(xy+yz+zx).$$

Mặt khác

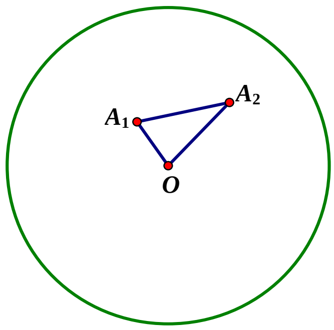
$$(x+y+z)^2 \geq 3(xy+yz+zx)$$

Do đó $P \geq \frac{7}{9}(x+y+z) - \frac{4}{27}(x+y+z)^2 = 1.$

Vậy $\min P = 1$ khi và chỉ khi $x=y=z=1$ hay $a=b=c=1$. ❐

Câu 7

Nhận xét: ít nhất 7 điểm trong số 8 điểm đã cho là khác tâm O. Ta gọi các điểm đó là $A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6, A_7, A_8$.



Ta có góc nhỏ nhất trong số các góc đỉnh O và hai điểm còn lại là

$$\widehat{A_iOA_k} \quad (i \neq k, 1 \leq i, k \leq 8) \text{ là không lớn hơn } \frac{360^0}{7} < 60^0.$$

Giả sử $\widehat{A_1OA_2}$ là góc bé nhất.

Xét $\triangle A_1OA_2$ ta có :

Vì $\widehat{A_1OA_2} < 60^0$ nên $\left[\begin{array}{l} \widehat{OA_1A_2} > 60^0 \\ \widehat{A_1A_2O} > 60^0 \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} OA_2 > A_1A_2 \\ OA_1 > A_1A_2 \end{array}\right.$.

Mà $OA_1 \leq 1$ hoặc $OA_2 \leq 1 \Rightarrow A_1A_2 < 1$. ❐

===Hết===

BỘ ĐỀ LUYỆN THI VÀO LỚP 10 CHUYÊN TOÁN

Câu 1

a) Ta có $1+x^2 = xy+yz+zx+x^2 = (xy+x^2)+(yz+zx)$

$$= x(y+x)+z(y+x) = (x+y)(x+z)$$

Tương tự: $1+y^2 = (x+y)(y+z)$; $1+z^2 = (y+z)(z+x)$.

Khi đó

$$P = x\sqrt{\frac{(y+x)(y+z)(z+x)(z+y)}{(x+z)(x+y)}} + y\sqrt{\frac{(z+x)(z+y)(x+y)(x+z)}{(x+y)(y+z)}}$$

$$+ z\sqrt{\frac{(x+y)(x+z)(y+x)(y+z)}{(z+x)(z+y)}}$$

$= x(y+z)+y(z+x)+z(x+y) = 2(xy+yz+zx) = 2$. ❒

b) Giả thiết đã cho tương đương với

$$4c^2 = c^2+ab+bc+ca = (a+c)(b+c).$$

Đặt $(a+c;b+c) = d$ thì $d \mid (a+c)-(b+c) \Rightarrow d \mid a-b \Rightarrow d = a-b$ hoặc $d=1$.

(chú ý rằng $a-b$ là số nguyên tố)

- **Trường hợp 1:** Nếu $d=1$ thì $a+c$ và $b+c$ đều là các số chính phương.
Đặt $a+c = m^2, b+c = n^2$ với $m,n \in \mathbb{Z}$.

Khi đó $m^2-n^2 = a-b \Rightarrow m-n=1 \Rightarrow m=n+1$.

Mặt khác, $4c^2 = m^2n^2 \Rightarrow 2c = mn \Rightarrow 8c+1 = 4mn+1 = 4n(n+1)+1 = (2n+1)^2$ là số chính phương.

- **Trường hợp 2:** Nếu $d = a-b$ thì $a+c = (a-b)x$ và $b+c = (a-b)y$ (với $x, y \in \mathbb{Z}$).
Khi đó $(a+c)-(b+c) = (a-b)x-(a-b)y \Rightarrow a-b = (a-b)(x-y)$

$$\Rightarrow x-y=1 \Rightarrow x = y+1.$$

Ta có $4c^2 = (a+c)(b+c) = (a-b)^2xy = (a-b)^2y(y+1)$.

Do đó $y(y+1)$ là số chính phương. Tích của hai số tự nhiên liên tiếp là số chính phương khi tích đó bằng 0. Suy ra $c=0$. Khi đó $8c+1=1$ là số chính phương.

Vậy $8c+1$ là số chính phương. ❒

Câu 2

a) Điều kiện: $x \ge 1$.

Với điều kiện trên, hệ phương trình đã cho tương đương với:

$$4\left(x-\sqrt{x-1}\right) = -32x^4 + 80x^3 - 50x^2 + 3 \quad (*)$$

Ta có

$VT(*) = 4\left(x-\sqrt{x-1}\right) = 4\left(\sqrt{x-1}-\frac{1}{2}\right)^2 + 3 \ge 3.$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow \sqrt{x-1} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x = \frac{5}{4}$.

Lại có: $VP(*) = 3 - 32x^2\left(x-\frac{5}{4}\right)^2 + 3 \le 3$.

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow x\left(x-\frac{5}{4}\right) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=\frac{5}{4} \end{array}\right.$.

Vậy phương trình đã cho có nghiệm duy nhất là: $x = \frac{5}{4}$. ❒

b)

- Xét $y=0$ ta có: $\begin{cases} x^3 = 1 \\ 2x^4 - 2x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ x=0; x=1 \end{cases} \Leftrightarrow x=1.$
- Xét $y \ne 0$. Đặt $t = \frac{x}{y}$. Hệ phương trình đã cho trở thành:

$$\begin{cases} t^3y^3 + 8y^3 - 4ty^3 = 1 \\ 2t^4y^4 + 8y^4 - 2ty - y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y^3\left(t^3 - 4t + 8\right) = 1 \\ y^3\left(2t^4 + 8\right) = 2t+1 \end{cases}.$$

Suy ra $\frac{t^3 - 4t + 8}{2t^4 + 8} = \frac{1}{2t+1} \Leftrightarrow t^3 - 8t^2 + 12t = 0 \Leftrightarrow t=0; t=2; t=6$.

- Với $t=0$ thì $x=0 \Rightarrow y = \frac{1}{2}$.

- Với $t=2$ thì $x=2y$. Thay vào phương trình thứ nhất của hệ đã cho ta được $y=\frac{1}{2}\Rightarrow x=1$.
- Với $t=6$ thì $x=6y$. Thay vào phương trình thứ nhất của hệ đã cho ta được $216y^3+8y^3-24y^3=1\Leftrightarrow y^3=\frac{1}{200}\Leftrightarrow y=\frac{1}{2\sqrt[3]{25}}\Rightarrow x=\frac{3}{\sqrt[3]{25}}$.

Vậy hệ phương trình đã cho có 4 nghiệm: $(1;0),\left(0;\frac{1}{2}\right),\left(1;\frac{1}{2}\right),\left(\frac{3}{\sqrt[3]{25}};\frac{1}{2\sqrt[3]{25}}\right)$. ❒

Câu 3

d luôn đi qua điểm cố định $I(0;-1)$ với mọi m thay đổi.

Phương trình hoành độ giao điểm của (P) và d là

$$-x^2=mx-1\Leftrightarrow x^2+mx-1=0.$$

Do $\frac{c}{a}=-1<0$ nên d luôn cắt (P) tại hai điểm phân biệt với mọi m thay đổi.

Gọi $A(x_1;mx_1-1),B(x_2;mx_2-1)$. Khi đó

$\frac{IA}{IB}=4\Leftrightarrow IA=4IB\Leftrightarrow IA^2=16IB^2\Leftrightarrow x_1^2+(mx_1)^2=16[x_2^2+(mx_2)^2]$

$\Leftrightarrow (x_1^2-16x_2^2)+m^2(x_1^2-16x_2^2)=0\Leftrightarrow(1+m^2)(x_1^2-16x_2^2)=0$

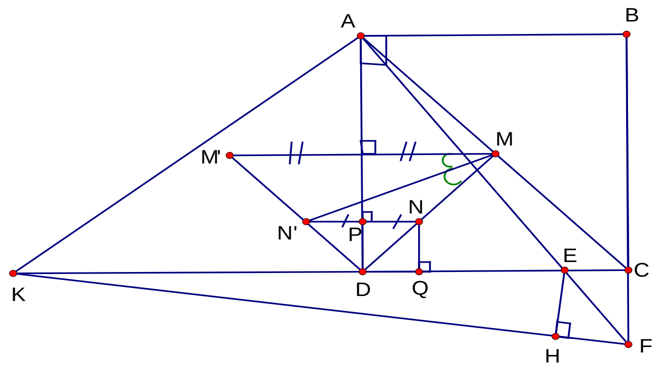
$\Leftrightarrow x_1^2-16x_2^2=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x_1=4x_2\\x_1=-4x_2\end{array}\right.$.

Do $x_1x_2=-1$ nên $x_2=-\frac{1}{x_1}$.

- Với $x_1=4x_2$ ta có $x_1=-\frac{1}{x_1}\Leftrightarrow x_1^2=-1$ (vô nghiệm).
- Với $x_1=-4x_2$ ta có $x_1=-4.\left(-\frac{1}{x_1}\right)\Leftrightarrow x_1^2=4\Leftrightarrow x_1=\pm2$.

Do đó $m=-(x_1+x_2)=\mp\frac{3}{2}$. ❒

Câu 4



a) Ta có $\triangle ABF = \triangle ADK \Rightarrow AF = AK$.

Trong tam giác vuông KAE có AD là đường cao nên

$$\frac{1}{AE^2}+\frac{1}{AF^2}=\frac{1}{AE^2}+\frac{1}{AK^2}=\frac{1}{AD^2}=\frac{1}{a^2} \text{ (không đổi).}$$

b) Ta có

$$S_{KEF}=\frac{1}{2}KE.EF.\sin\widehat{AEK}=\frac{1}{2}KE.EF.\cos\widehat{AKE} \qquad (1)$$

Mặt khác

$$S_{KEF}=\frac{1}{2}EH.KF=\frac{1}{2}EH.(KH+HF). \qquad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra

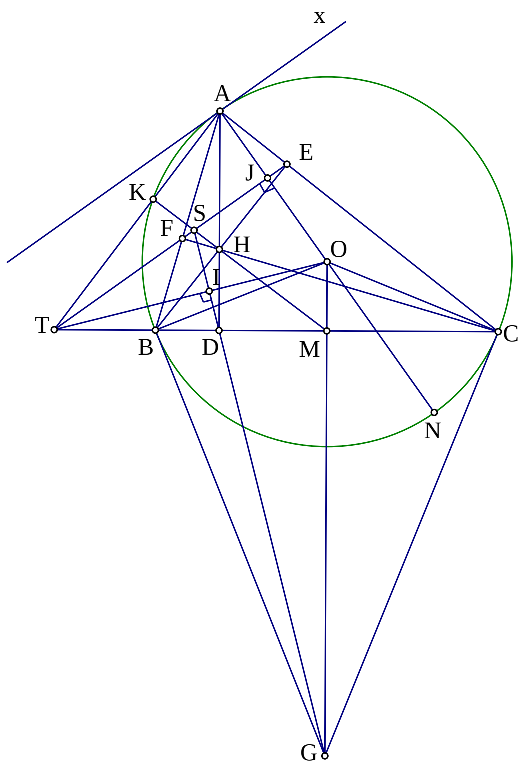
$$KE.EF.\cos\widehat{AKE}=EH.(KH+HF)$$

$$\Leftrightarrow \cos\widehat{AKE}=\frac{EH.KH+EH.HF}{KE.EF}$$

$$\Leftrightarrow \cos\widehat{AKE}=\frac{EH}{EF}.\frac{KH}{EK}+\frac{EH}{KE}.\frac{HF}{EF}$$

$$\Leftrightarrow \cos\widehat{AKE}=\sin\widehat{EFK}.\cos\widehat{EKF}+\sin\widehat{EKF}.\cos\widehat{EFK}.$$ ❒

Câu 5



a) Giả sử GD cắt TO tại I và TF cắt AO tại J. Ta sẽ chứng minh được $AO \perp EF$ tại J.
Thật vậy, dựng tiếp tuyến Ax của (O) thì $Ax \perp AO$.

Ta có: $\widehat{xAC} = \widehat{ABC}$ mà $\widehat{ABC} = \widehat{AEF} \Rightarrow \widehat{xAC} = \widehat{AEF} \Rightarrow Ax // EF$ hay $AO \perp EF$.

Mặt khác, ta cần chứng minh $GS \perp TO$ tại điểm I.
Thật vậy, ta có $\widehat{MFB} = \widehat{MBF} \Leftrightarrow \widehat{MFD} + \widehat{DFB} = \widehat{MTF} + \widehat{TFB}$.
Mà $\widehat{DFB} = \widehat{DCA} = \widehat{EFA} = \widehat{TFB}$ nên $\widehat{MFD} = \widehat{MTF}$ hay $\triangle MDF \sim \triangle MTF$.
Từ đó suy ra $MF^2 = MD.MT$.
Mặt khác ta có $MO.MG = MB.MC = MF^2$ (do $MB = MC = MF$).
Suy ra $MO.MG = MD.MT$ hay $\triangle MOT \sim \triangle MDG \Rightarrow GI \perp OT$.
Dễ thấy 4 điểm A, K, H, E cùng nằm trên đường tròn đường kính AH.
Vì tứ giác $AKBC$ nội tiếp nên $TK.TA = TB.TC$.
Vì tứ giác $EFBC$ nội tiếp nên $TK.TA = TF.TE$ hay tứ giác $AKFE$ nội tiếp.
Vậy 5 điểm A, K, F, H, E cùng nằm trên một đường tròn.
b) Do tứ giác $JSIO$ nội tiếp nên $TS.TJ = TI.TO$.
Do tứ giác $IOMD$ nội tiếp nên $TI.TO = TM.TD$.
Xét tứ giác $MDFE$ có:
$\widehat{FDE} = 180^0 - \widehat{FDB} - \widehat{EDB} = 180^0 - \widehat{A} - \widehat{A} = 180^0 - 2\widehat{A}$

$\widehat{FME}=180^0-\widehat{FMB}-\widehat{EMC}=180^0-\left(180^0-2\widehat{B}\right)-\left(180^0-2\widehat{C}\right)=2(\widehat{B}+\widehat{C})-180=180^0-2\widehat{A}$

Suy ra tứ giác $MDFE$ nội tiếp. Do đó $TD.TM=TE.TF$.
Nhưng $TE.TF=TK.TA$ suy ra $TS.TJ=TA.TK\Rightarrow$ tứ giác $AKSJ$ nội tiếp
$\Rightarrow\widehat{SKA}=\widehat{SJA}=90^0\Rightarrow S\in HK$.

Mặt khác từ chứng minh trên ta cũng có $AKMD$ nội tiếp nên $\widehat{MKA}=\widehat{MDA}=90^0$. Vậy 4 điểm M,H,S,K thẳng hàng. ❒

Câu 6

Đặt $x=a+b,\ y=b+c,\ z=a+c$.

Suy ra: $x,y,z>0$ và $x+y+z=2\left(a+b+c\right)=1$.

Khi đó: $P=\sqrt{\dfrac{xy}{xy+z}}+\sqrt{\dfrac{yz}{yz+x}}+\sqrt{\dfrac{zx}{zx+y}}$.

Áp dụng bất đẳng thức AM – GM ta có

$$\frac{xy}{xy+z}=\frac{xy}{xy+z\left(x+y+z\right)}=\frac{xy}{\left(x+z\right)\left(y+z\right)}\Rightarrow\sqrt{\frac{xy}{xy+z}}=\sqrt{\frac{x}{x+z}.\frac{y}{y+z}}\le\frac{1}{2}\left(\frac{x}{x+z}+\frac{y}{y+z}\right)$$

Chứng minh tương tự ta được:

$$\sqrt{\frac{yz}{yz+x}}\le\frac{1}{2}\left(\frac{y}{y+x}+\frac{z}{z+x}\right)\ ;$$

$$\sqrt{\frac{zx}{zx+y}}\le\frac{1}{2}\left(\frac{z}{z+y}+\frac{x}{x+y}\right).$$

Cộng vế theo vế các bất đẳng thức trên ta được: $P\le\dfrac{3}{2}$.

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c=\dfrac{1}{6}$.

Vậy $\max P=\dfrac{3}{2}$ khi và chỉ khi $a=b=c=\dfrac{1}{6}$. ❒

Câu 7. Xét đa thức $B\left(x\right)=ax^2+bx+c,a\neq 0$ có biệt thức $\Delta_B=b^2-4ac$.

Hai đa thức được viết thêm trở thành:

$C\left(x\right)=\left(a+b+c\right)x^2+\left(b+2a\right)x+a;\ D\left(x\right)=cx^2+\left(b-2a\right)x+\left(a-b+c\right)$.

Dễ dàng tính được $\Delta_B=\Delta_C=\Delta_D=b^2-4ac$. Suy ra bất biến là biệt thức của đa thức ban đầu và đa thức được viết thêm.

Vì hai đa thức $A(x)$ và $E(x)$ có biệt thức Δ_A và Δ_E khác nhau nên không thể viết được đa thức $E(x)$. ❐

===Hết===

BỘ ĐỀ LUYỆN THI VÀO LỚP 10 CHUYÊN TOÁN

HƯỚNG DẪN GIẢI ĐỀ SỐ 12

Câu 1

a) Do $x^3 - y^3 = (x-y)(x^2+xy+y^2)$ và $x^2+xy+y^2 \ge 0$ nên $x \ge y \Leftrightarrow x^3 \ge y^3$.

Đặt $x = \sqrt[3]{a}, y = \sqrt[3]{b}$. Khi đó $x + y = \sqrt[3]{y^3 - \frac{1}{4}} \Rightarrow x = \sqrt[3]{y^3 - \frac{1}{4}} - y < 0$.

Giả sử $x < -1$, ta có

$$\sqrt[3]{y^3 - \frac{1}{4}} = y + x < y - 1 \Leftrightarrow y^3 - \frac{1}{4} < y^3 - 3y^2 + 3y - 1 \Leftrightarrow (y-1)^2 < 0 \text{ (vô lý).}$$

Do đó $x \ge -1$ hay $a \ge -1$.

Vậy $-1 \le a < 0$. ❐

b) Đặt $p^2 - p + 1 = a^3$ với $a \in \mathbb{N}^*$.

Khi đó $p(p-1) = (a-1)(a^2+a+1)$ (1)

Nếu $p \mid a-1$ thì $a = pk+1$ với $k \in \mathbb{N}$.

Khi đó $(1) \Leftrightarrow p^2 - p + 1 = p^3k^3 + 3p^2k^2 + 3pk + 1$. Với $k \ge 2$ thì $VT(1) < VP(1)$, do đó $0 \le k \le 1$.

+ Với $k = 0$ thì $p^2 - p + 1 = 1 \Leftrightarrow p(p-1) = 0$, mâu thuẫn.

+ Với $k = 1$ thì $p^3 - 2p^2 + 4p = 0 \Leftrightarrow p^2 - 2p + 4 = 0 \Leftrightarrow (p-1)^2 + 3 = 0$, mâu thuẫn

Do đó $p \nmid a-1$, cho nên $p \mid a^2 + a + 1$. (2)

Lại có $a - 1 \mid p(p-1)$ mà $\gcd(p, a-1) = 1$ nên $a - 1 \mid p - 1$.

Đặt $p=(a-1)b+1$ với $b\in\mathbb{N}$. Khi đó từ (2) suy ra $\dfrac{a^2+a+1}{(a-1)b+1}$ là số nguyên dương. Điều này tương đương với $\dfrac{a^2b+ab+b}{ab-b+1}=a+2+\dfrac{3b-2-a}{ab-b+1}$ (3)

nguyên dương. Do đó ta phải có $|3b-2-a|\ge ab-b+1$.

- **Trường hợp 1:** Nếu $2b-2-a\ge ab-b+1 \Leftrightarrow b(4-a)\ge a+3$.

Nếu $a\ge 4$ thì $b(4-a)<a+3$, mâu thuẫn. Do đó $2\le a\le 3$. Nếu $a=3$ thì phương trình tương đương với $p(p-1)=26$, mâu thuẫn. Nếu $a=2$ thì phương trình đầu tương đương với $p(p-1)=7$, mâu thuẫn.

- **Trường hợp 2:** Nếu $2+a-3b\ge ab-b+1 \Leftrightarrow b(2+a)\le a+1$, mâu thuẫn vì $a+1>a+2$.
- **Trường hợp 3:** Nếu $3b-2-a=0 \Leftrightarrow a=3b-2$. Khi đó $p=3b(b-1)+1$ và $a^2-a+1=(3b-2)^2+(3b-2)+1=9b^2-9b+3$. Do đó $\dfrac{a^2+a+1}{p}=3$.

Ta có $(1)\Leftrightarrow p-1=3(a-1)\Leftrightarrow (b-1)(b-3)=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} b=1\\ b=3\end{array}\right.$.

+ Nếu $b=1$ thì $p=a$, mâu thuẫn vì khi đó $p^2+p+1=p^3 \Leftrightarrow p\left(p^2-p-1\right)=1$.

+ Nếu $b=3$ thì $p=3a-2$. Khi đó $(1)\Leftrightarrow 9a^2-15a+7=a^3 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a=1\\ a=7\end{array}\right.$.

Thử lại thấy $a=7$ thỏa mãn. Với $a=7$ suy ra $p=19$.

Vậy $p=19$ thỏa mãn yêu cầu bài toán. ❐

Câu 2

a) Phương trình đã cho tương đương với:

$$\frac{2(x+1)^4+\frac{1}{2}\left(x^2+3\right)^2+\frac{1}{2}(x+1)^2\left(x^2+3\right)}{2(x+1)^2+x^2+3}=(x+1)\sqrt{x^2+3}.$$

Đặt $a=x+1, b=\sqrt{x^2+3}, b\ge\sqrt{3}$.

Phương trình trên thành:

$$2a^4+\frac{1}{2}b^4+\frac{1}{2}a^2b^2=ab\left(2a^2+b^2\right).$$

Chia cả hai vế cho b^4 rồi đặt $t=\dfrac{a}{b}$ ta được:

$$4t^4-4t^3+t^2-2t+1=0\Leftrightarrow 4t^3(t-1)+(t-1)^2=0$$

$$\Leftrightarrow (t-1)\left(4t^3+t-1\right)=0\Leftrightarrow (t-1)(2t-1)\left(2t^2+t+1\right)=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=1 \\ t=\dfrac{1}{2} \end{array}\right.$$

- Với $t=1$ thì $a=b$. Khi đó $x+1=\sqrt{x^2+3}\Leftrightarrow x^2+2x+1=x^2+3\Leftrightarrow x=1$.
- Với $t=\dfrac{1}{2}$ thì $b=2a$. Khi đó

$$\sqrt{x^2+3}=2(x+1)\Leftrightarrow \begin{cases} x\geq -1 \\ 3x^2+8x+1=0 \end{cases}\Leftrightarrow x=\frac{\sqrt{13}-4}{3}.$$

Vậy phương trình đã cho có 2 nghiệm là $x=1; x=\dfrac{\sqrt{13}-4}{3}$. ❒

b) Điều kiện: $x\geq 0; y\geq 0; xy+(x-y)\left(\sqrt{xy}-2\right)\geq 0$.

Phương trình thứ nhất của hệ tương đương với:

$$\sqrt{xy+(x-y)\left(\sqrt{xy}-2\right)}-y+\sqrt{x}-\sqrt{y}=0$$

$$\Leftrightarrow \frac{(x-y)\left(y+\sqrt{xy}-2\right)}{\sqrt{xy+(x-y)\left(\sqrt{xy}-2\right)}+y}+\frac{x-y}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}=0$$

$$\Leftrightarrow (x-y)\left(\frac{y+\sqrt{xy}-2}{\sqrt{xy+(x-y)\left(\sqrt{xy}-2\right)}+y}+\frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}\right)=0$$

Mặt khác từ phương trình thứ hai của hệ ta có:

$$y+\sqrt{xy}=x^2-x+\frac{4}{x+1}=\left(\sqrt{x+1}-\frac{2}{\sqrt{x+1}}\right)^2+(x-1)^2+2\geq 2\ .$$

Suy ra: $\dfrac{y+\sqrt{xy}-2}{\sqrt{xy+(x-y)\left(\sqrt{xy}-2\right)}+y}+\dfrac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}>0$. Do đó: $x=y$.

Thay $y = x$ vào phương trình thứ hai của hệ ta được:

$$x^3 - 2x^2 - 3x + 4 = 0 \Leftrightarrow (x-1)(x^2 - x - 4) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ x = \dfrac{1 \pm \sqrt{17}}{2} \end{array}\right..$$

Vì $x = y \geq 0$ nên hệ phương trình đã cho có 2 nghiệm là:

$$(1;1), \left(\frac{1+\sqrt{17}}{2}; \frac{1+\sqrt{17}}{2}\right). \square$$

Câu 3

Ta sẽ chứng minh $2\sqrt{n} > \sqrt{n+1} + \sqrt{n-1}$ (*) với mọi n nguyên dương.

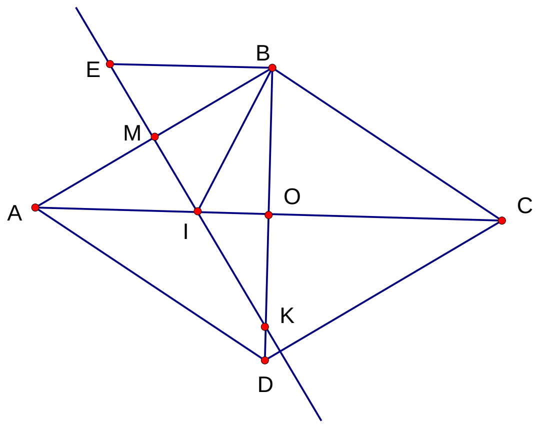
Thật vậy, (*) $\Leftrightarrow 4n > 2n + 2\sqrt{n^2 - 1} \Leftrightarrow \sqrt{n^2 - 1} < n$ (luôn đúng).

Áp dụng bất đẳng thức (*) suy ra $a > b > 0$.

Do $-m^2 + 7m - 14 = -\left(m - \frac{7}{2}\right)^2 - \frac{7}{4} < 0$ nên hàm số $f(x)$ nghịch biến khi $x > 0$.

Vậy $f(a) < f(b)$. $\square$

Câu 4



Tứ giác *ABCD* là hình thoi nên *AC* là đường trung trực của *BD* và *BD* là đường trung trực của *AC*. Do vậy nếu gọi *M, I ,K* là giao điểm của đường trung trực của đoạn thẳng *AB* với *AB,AC,BD* thì ta có *I, K* là tâm đường tròn ngoại tiếp các tam giác *ADB, ABC*.

Từ đó ta có *KB = r* và *IB = R*. Lấy một điểm *E* đối xứng với điểm *I* qua *M* , ta có *BEAI* là hình thoi (vì có hai đường chéo *EI* và *AB* vuông góc với nhau và cắt nhau tại trung điểm mỗi đường).

a) Ta có $\widehat{BAI} = \widehat{EBA}$ mà $\widehat{BAI} + \widehat{ABO} = 90^0 \Rightarrow \widehat{EBA} + \widehat{ABO} = 90^0$

Xét ΔEBK có $\widehat{EBK}=90^0$,đường cao BM. Theo hệ thức trong tam giác vuông ta có

$$\frac{1}{BE^2}+\frac{1}{BK^2}=\frac{1}{BM^2}.$$

Mà $BK=r;\quad BE=BI=R,\ BM=\frac{a}{2}$ nên $\frac{1}{R^2}+\frac{1}{r^2}=\frac{4}{a^2}$.

b) Xét ΔAOB và ΔAMI có $\widehat{AOB}=\widehat{AMI}=90^0$ và $\widehat{A}$ chung.

Do đó $\Delta AOB\sim\Delta AMI\Rightarrow\frac{AO}{AB}=\frac{AM}{AI}\Rightarrow AO=\frac{AM.AB}{AI}=\frac{AB^2}{2R}$.

Chứng minh tương tự ta được $BO=\frac{BM.AB}{BK}=\frac{AB^2}{2r}$.

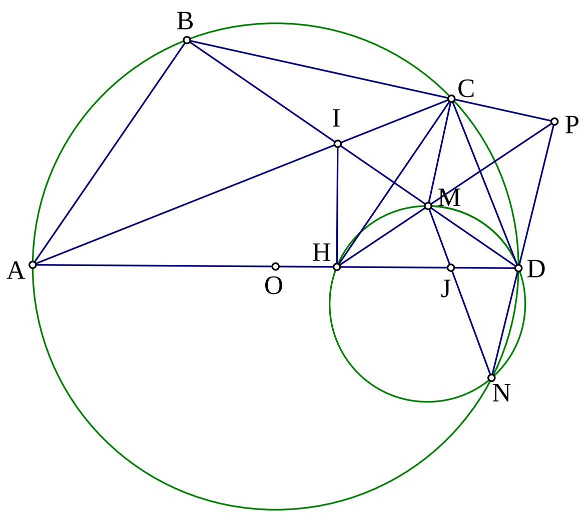
Ta có $S=2.AO.OB=2.\frac{AB^4}{4Rr}$.

Mà theo định lí Pythagore trong tam giác vuông AOB ta có

$$AB^2=OA^2+OB^2=\frac{1}{4}AB^4\left(\frac{1}{R^2}+\frac{1}{r^2}\right)\Rightarrow AB^2=\frac{4R^2r^2}{R^2+r^2}.$$

Vậy $S=\frac{8R^3r^3}{(R^2+r^2)^2}$. ❒

Câu 5



a) Ta có $\widehat{ICD}=90^0$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn (O)).

Tứ giác $IHDC$ có $\widehat{IHD}=\widehat{ICD}=90^0$. Do đó tứ giác $IHDC$ nội tiếp đường tròn tâm M $\Rightarrow\widehat{IMH}=2\widehat{ICH}$ và $\widehat{ICH}=\widehat{IDH}$.

Mà $\widehat{BCA} = \widehat{ICH}\left(= \widehat{IDH}\right)$ (hai góc cùng chắn $\overset{\frown}{AB}$ của $\left(O\right)$).

Do đó $\widehat{BCA} = \widehat{ICH}\left(= \widehat{IDH}\right)$ nên $\widehat{BCH} = 2\widehat{ICH}$ .Ta có $\widehat{BCH} = \widehat{IMH}\left(= 2\widehat{ICH}\right)$. Vậy tứ giác $BCMH$ nội tiếp.

b) Gọi T là giao điểm của PD và đường tròn $\left(J\right)$ ngoại tiếp tam giác $\triangle HMD$ (với T khác D).

Xét ΔPHD và ΔPTM có:

$\widehat{HPD}$ (chung)

$\widehat{PHD} = \widehat{PTM}$ (hai góc nội tiếp cùng chắn $\overset{\frown}{MD}$ của $\left(J\right)$).

Do đó $\Delta PHD \sim \Delta PTM$ (g.g) $\Rightarrow \dfrac{PH}{PT} = \dfrac{PD}{PM} \Rightarrow PM.PH = PD.PT$.

Chứng minh tương tự có $PM.PH = PC.PB$, nên $PD.PT = PC.PB$.

Xét ΔPBD và ΔPTC có $\widehat{PBD}$ (chung), $\dfrac{PD}{PC} = \dfrac{PB}{PT}$ (vì $PD.PT = PC.PB$).

Suy ra $\Delta PBD \sim \Delta PTC$ (c.g.c) $\Rightarrow \widehat{PBD} = \widehat{PTC}$.

Do đó tứ giác $BCDT$ nội tiếp nên T thuộc đường tròn $\left(O\right)$ hay $T \equiv N$.

Vậy ba điểm P, D, N thẳng hàng. ❐

Câu 6

Đặt $x = \dfrac{1}{a}, y = \dfrac{2}{b}, z = \dfrac{3}{c}$. Điều kiện của bài toán thành: $\begin{cases} x, y, z > 0 \\ 2xyz \geq 2x + 4y + 7z \end{cases}$.

Bài toán quy về tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $P = x + y + z$.

Từ $2xyz \geq 2x + 4y + 7z$ suy ra $z\left(2xy - 7\right) \geq 2x + 4y \Rightarrow \begin{cases} 2xy \geq 7 \\ z \geq \dfrac{2x + 4y}{2xy - 7} \end{cases}$.

Khi đó: $P \geq x + y + \dfrac{2x + 4y}{2xy - 7} = x + \dfrac{11}{2x} + y - \dfrac{7}{2x} + \dfrac{2x + \dfrac{14}{x}}{2xy - 7}$

$$\geq x + \frac{11}{2x} + 2\sqrt{1 + \frac{7}{x^2}} \text{ (do bất đẳng thức AM - GM).}$$

Dễ dàng chứng minh được: $2\sqrt{1 + \dfrac{7}{x^2}} \geq \dfrac{3 + \dfrac{7}{x}}{2}$.

Khi đó

$$P \ge x + \frac{11}{2x} + \frac{3+\frac{7}{x}}{2} = \frac{3}{2} + x + \frac{9}{x} \ge \frac{3}{2} + 2\sqrt{x.\frac{9}{x}} = \frac{15}{2}$$ (do bất đẳng thức AM – GM).

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow x = 3, y = \frac{5}{2}, z = 2$ hay $a = \frac{1}{3}, b = \frac{4}{5}, c = \frac{3}{2}$.

Vậy $\min P = \frac{15}{2} \Leftrightarrow a = \frac{1}{3}, b = \frac{4}{5}, c = \frac{3}{2}$. ❒

Câu 7

Trong 1000 số tự nhiên đầu tiên trong 2015 số tự nhiên liên tiếp bất kì luôn tồn tại 1 số chia hết cho 1000. Giả sử số đó là $\overline{A000}$ (với $A \in \mathbb{N}^*$).

Khi đó ta có 28 số $\overline{A000}, \overline{A001}, ..., \overline{A009}, \overline{A019}, ..., \overline{A099}, \overline{A199}, ..., \overline{A999}$ cũng thuộc 2015 số tự nhiên liên tiếp đã chọn ban đầu.

Gọi S_A là tổng các chữ số của A, khi đó ta có tổng các chữ số của 28 số đã chọn trên lần lượt là $S_A, S_A+1, S_A+2, ..., S_A+27$ là 28 số tự nhiên liên tiếp. Do đó chắc chắn tồn tại một số trong 28 số đã chọn có tổng các chữ số chia hết cho 28. ❒

===Hết===

BỘ ĐỀ LUYỆN THI VÀO LỚP 10 CHUYÊN TOÁN

HƯỚNG DẪN GIẢI ĐỀ SỐ 13

Câu 1

a) Từ $x = \sqrt[3]{y - \sqrt{y^2+1}} + \sqrt[3]{y + \sqrt{y^2+1}}$ suy ra $x^3 = 2y - 3x \Leftrightarrow x^3 + 3x - 2y = 0$.

Khi đó $P = x(x^3+3x-2y) + y(x^3+3x-2y) + 2019 = 2019$. ❒

b) Đặt $p = c^2 + d^2$ với $c, d \in \mathbb{Z}$.

Ta có $\frac{a^2+b^2}{p} = \frac{(a^2+b^2)(c^2+d^2)}{p^2} = \frac{(ad+bc)^2 + (ac-bd)^2}{p^2}$

$$=\left(\frac{ad+bc}{p}\right)^2+\left(\frac{ac-bd}{p}\right)^2=\left(\frac{ad-bc}{p}\right)^2+\left(\frac{ac+bd}{p}\right)^2.$$

Mặt khác, ta có

$(ac+bd)(ac-bd)=a^2c^2-b^2d^2=a^2(c^2+d^2)-d^2(a^2+b^2)=a^2.p-d^2(a^2+b^2)\vdots p$ Suy ra $p\mid ac+bd$ hoặc $p\mid ac-bd$.

- **Trường hợp 1:** Nếu $p\mid ac+bd$ thì $\frac{a^2+b^2}{p}=\left(\frac{ac+bd}{p}\right)^2+\left(\frac{ad-bc}{p}\right)^2$.

Vì $\frac{a^2+b^2}{p},\frac{ac+bd}{p}\in\mathbb{Z}$ nên $\frac{ad-bc}{p}\in\mathbb{Z}$.

Do đó $\frac{a^2+b^2}{p}$ là tổng của hai số chính phương.

- **Trường hợp 2:** Nếu $p\mid ac-bd$ thì $\frac{a^2+b^2}{p}=\left(\frac{ad+bc}{p}\right)^2+\left(\frac{ac-bd}{p}\right)^2$

Vì $\frac{a^2+b^2}{p},\frac{ac-bd}{p}\in\mathbb{Z}$ nên $\frac{ad+bc}{p}\in\mathbb{Z}$.

Do đó $\frac{a^2+b^2}{p}$ là tổng của hai số chính phương.

Vậy ta hoàn tất chứng minh. ❒

Câu 2

a) Điều kiện: $x\ge-\frac{1}{4}$.

Phương trình đã cho tương đương với

$$\frac{2}{3}\sqrt{4x+1}=(3x-4)^2-2x-\frac{11}{3}.$$

Đặt $3y-4=\sqrt{4x+1}$; $y\ge\frac{4}{3}$. Khi đó ta có hệ phương trình

$$\begin{cases}(3x-4)^2=2x+2y+1\\(3y-4)^2=4x+1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}(3y-4)^2=4x+1\\(x-y)(9x+9y-22)=0\end{cases}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x=y\\(3x-4)^2=4x+1\end{cases}\\\begin{cases}9x+9y-22=0\\(3y-4)^2=4x+1\end{cases}\end{array}\right..$$

Giải hai hệ phương trình trên, cuối cùng ta thu được 2 nghiệm của phương trình đã cho

$$x=\frac{14+\sqrt{61}}{9}\ ;\ x=\frac{12-\sqrt{53}}{9}.\ \square$$

b) Điều kiện: $\begin{cases}1+2xy>0\\ x(1-2x)\ge 0\\ y(1-2y)\ge 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}0\le x\le \dfrac{1}{2}\\ 0\le y\le \dfrac{1}{2}\end{cases}.$

Với điều kiện (*) ta có: $\dfrac{1}{\sqrt{1+2x^2}}+\dfrac{1}{\sqrt{1+2y^2}}\le\dfrac{2}{\sqrt{1+2xy}}$. Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow x=y$.

<u>Chứng minh:</u>

Theo bất đẳng thức Cauchy- Schwarz ta có:

$$\left(\frac{1}{\sqrt{1+2x^2}}+\frac{1}{\sqrt{1+2y^2}}\right)^2\le 2\left(\frac{1}{1+2x^2}+\frac{1}{1+2y^2}\right)\qquad (1)$$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow \sqrt{1+2x^2}=\sqrt{1+2y^2}\Leftrightarrow x=y$ (do $x,y\ge 0$).

Lại có:

$$\frac{1}{1+2x^2}+\frac{1}{1+2y^2}-\frac{2}{1+2xy}=\frac{2(y-x)^2(2xy-1)}{(1+2x^2)(1+2y^2)(1+2xy)}\le 0\ \text{(do } 0\le x,y\le\frac{1}{2}\text{).}$$

Suy ra:

$$\frac{1}{1+2x^2}+\frac{1}{1+2y^2}\le\frac{2}{1+2xy}\qquad (2)$$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow x=y$.

Từ (1) và (2) ta thu được bất đẳng thức cần phải chứng minh.

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow$ dấu "=" xảy ra đồng thời ở (1) và (2).

Hệ phương trình đã cho tương đương với:

$$\begin{cases}x=y\\ \sqrt{x(1-2x)}+\sqrt{y(1-2y)}=\dfrac{2}{9}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=y\\ \sqrt{y(1-2y)}=\dfrac{1}{9}\end{cases}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=y=\dfrac{9-\sqrt{73}}{36}\\ x=y=\dfrac{9+\sqrt{73}}{36}\end{array}\right..$$

Vậy hệ phương trình đã cho có hai nghiệm là:

$$\left(\frac{9-\sqrt{73}}{36};\frac{9-\sqrt{73}}{36}\right),\ \left(\frac{9+\sqrt{73}}{36};\frac{9+\sqrt{73}}{36}\right).$$ ❐

Câu 3

Đường thẳng d qua $I(0;-1)$ với hệ số k nên có phương trình $y=kx-1$.

Phương trình hoành độ giao điểm của (P) và d là

$$-x^2=kx-1 \Leftrightarrow x^2+kx-1=0 \quad (*)$$

Do $\Delta=k^2+4>0, \forall k$ nên phương trình luôn có 2 nghiệm phân biệt với mọi k. Điều này có nghĩa là d luôn cắt (P) tại 2 điểm phân biệt A, B với mọi k.

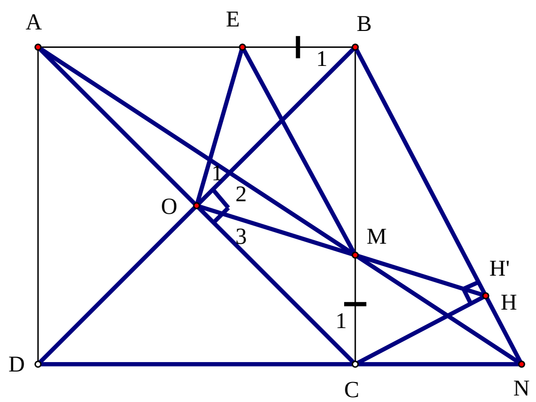
Do $x_1x_2=-1$ nên $|x_1-x_2|=\left|x_1+\frac{1}{x_1}\right|=|x_1|+\left|\frac{1}{x_1}\right|\geq 2$ (do x_1 và $\frac{1}{x_1}$ cùng dấu).

Phương trình đường thẳng OA là $y=-x_1x$.

Phương trình đường thẳng OB là $y=-x_2x$.

Do $(-x_1).(-x_2)=x_1x_2=-1$ nên $OA\perp OB$ hay $\triangle OAB$ vuông tại O. ❐

Câu 4



a) Xét ΔOEB và ΔOMC có

Vì $ABCD$ là hình vuông nên ta có $OB=OC$ và $\widehat{B_1}=\widehat{C_1}=45^0$

$BE=CM$ (giả thiết)

Suy ra $\Delta OEB=\Delta OMC$ (c – g – c)

$\Rightarrow OE=OM$ và $\widehat{O_1}=\widehat{O_3}$.

Lại có $\widehat{O_2}+\widehat{O_3}=\widehat{BOC}=90^0$ (do tứ giác $ABCD$ là hình vuông)

hay $\widehat{O_2}+\widehat{O_1}=\widehat{EOM}=90^0$. Kết hợp với $OE=OM$ $\Rightarrow \Delta OEM$ vuông cân tại O.

Do tứ giác $ABCD$ là hình vuông nên $AB = CD$ và $AB // CD$.

Khi đó $AB // CN \Rightarrow \frac{AM}{MN} = \frac{BM}{MC}$ (theo định lí Ta-lét) (1).

Mà $BE = CM$ và $AE = BM$, thay vào (1) ta được $\frac{AM}{MN} = \frac{AE}{EB}$. Theo định lí đảo Ta-lét suy ra $ME // BN$.

b) Gọi H' là giao điểm của OM và BN.

Từ $ME // BN$ suy ra $\widehat{OME} = \widehat{OH'E}$ (cặp góc so le trong).

Mà $\widehat{OME} = 45^0$ (do ΔOEM vuông cân tại O) nên

$$\widehat{MH'B} = 45^0 = \widehat{C_1} \Rightarrow \triangle OMC = \triangle BMH' \text{ (g – g)} \Rightarrow \frac{OM}{OB} = \frac{MH'}{MC}.$$

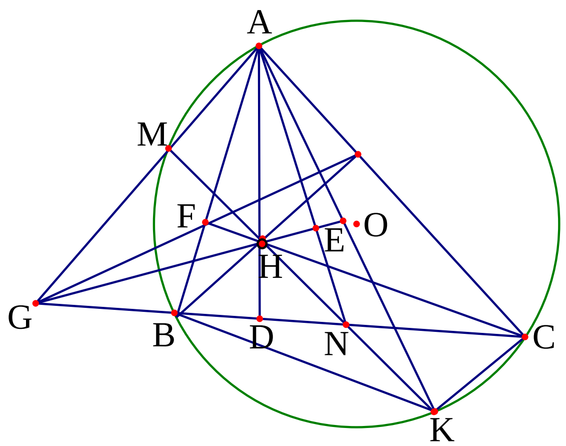
Kết hợp $\widehat{OMB} = \widehat{CMH'}$ (hai góc đối đỉnh) ta đi đến

$$\triangle OMB = \triangle CMH' \text{ (c – g – c)} \Rightarrow \widehat{OBM} = \widehat{MH'C} = 45^0.$$

Do đó $\widehat{BH'C} = \widehat{BH'M} + \widehat{MH'C} = 90^0 \Rightarrow CH' \perp BN$.

Mà $CH \perp BN$ ($H \in BN$) nên $H \equiv H'$ hay 3 điểm O, M, H thẳng hàng. ❒

Câu 5



a) Do tứ giác $AMBC$ nội tiếp nên $GM.GA = GB.GC$.
Do tứ giác $BEFC$ nội tiếp nên $GB.GC = GF.GE$. Suy ra $GF.GE = GM.GA$.
Do đó tứ giác $AMEF$ nội tiếp.
b) Theo kết quả trên và tứ giác $AEFH$ nội tiếp suy ra M nằm trên đường tròn đường kính AH. Do đó $HM \perp MA$. Tia HM cắt lại đường tròn (O) tại K, khi đó $\widehat{AMK} = 90^0$ nên AK là đường kính của (O).

Từ đó suy ra: $KC \perp CA, KB \perp BA \Rightarrow KC // BH, KB // CH \Rightarrow$ tứ giác $BHCK$ là hình bình hành $\Rightarrow KH$ đi qua điểm N. Khi đó M, H, N thẳng hàng. Trong tam giác GAN có hai đường cao AD, NM cắt nhau tại H nên H là trực tâm của tam giác GAN.

Vậy $GH \perp AN$. ❐

Câu 6

Theo giả thiết ta có: $2 \ge x^2 + y^2 + z^2 + xy + yz + zx$. Khi đó:

$$2\left(\frac{xy+1}{(x+y)^2}\right) \ge \frac{2xy + x^2 + y^2 + z^2 + xy + yz + zx}{(x+y)^2}$$

$$= \frac{(x+y)^2 + (z+x)(y+x)}{(x+y)^2} = 1 + \frac{(z+x)(z+y)}{(x+y)^2}$$

hay
$$2\left(\frac{xy+1}{(x+y)^2}\right) \ge 1 + \frac{(z+x)(z+y)}{(x+y)^2} \qquad (1)$$

Tương tự ta có:
$$2\left(\frac{yz+1}{(y+z)^2}\right) \ge 1 + \frac{(x+y)(x+z)}{(y+z)^2} \qquad (2)$$

$$2\left(\frac{zx+1}{(z+x)^2}\right) \ge 1 + \frac{(y+z)(y+x)}{(z+x)^2} \qquad (3)$$

Cộng tương ứng ba bất đẳng thức (1), (2) và (3) và áp dụng bất đẳng thức

AM – GM ta có:

$$2\left(\frac{xy+1}{(x+y)^2} + \frac{yz+1}{(y+z)^2} + \frac{zx+1}{(z+x)^2}\right)$$

$$\ge 3 + \frac{(z+x)(z+y)}{(x+y)^2} + \frac{(x+y)(x+z)}{(y+z)^2} + \frac{(y+z)(y+x)}{(z+x)^2}$$

$$\ge 3 + 3\sqrt[3]{\frac{(z+x)(z+y)}{(x+y)^2} . \frac{(x+y)(x+z)}{(y+z)^2} . \frac{(y+z)(y+x)}{(z+x)^2}} = 3 + 3 = 6$$

Khi đó: $\dfrac{xy+1}{(x+y)^2} + \dfrac{yz+1}{(y+z)^2} + \dfrac{zx+1}{(z+x)^2} \ge 3$.

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $x = y = z = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$. ❐

Câu 7

Xét các tập con khác rỗng và khác A của A. Có tất cả $2^6 - 2 = 62$ tập con như vậy. Gọi X là một tập bất kì trong số những tập đang xét và kí hiệu $S(X)$ là tổng các phần tử của X.

Ta có $0 \le S(X) \le 10+11+12+13+14=60$.

Theo nguyên lí Dirichlet, có hai tổng S và S' nhận cùng giá trị. Vậy luôn tồn tại hai tập con B,C của A sao cho $S(B)=S(C)$.

===Hết===

BỘ ĐỀ LUYỆN THI VÀO LỚP 10 CHUYÊN TOÁN

HƯỚNG DẪN GIẢI ĐỀ SỐ 14

Câu 1

a) Với $k \in \mathbb{N}^*$, ta có:

$$\frac{1}{\sqrt{k^3}+\sqrt{k}}=\frac{\sqrt{k}}{k^2+k}=\sqrt{k}\frac{1}{k(k+1)}=\sqrt{k}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right)$$

$$=\sqrt{k}\left(\frac{1}{\sqrt{k}}+\frac{1}{\sqrt{k+1}}\right)\left(\frac{1}{\sqrt{k}}-\frac{1}{\sqrt{k+1}}\right)$$

$$=\left(1+\sqrt{\frac{k}{k+1}}\right)\left(\frac{1}{\sqrt{k}}-\frac{1}{\sqrt{k+1}}\right)<2\left(\frac{1}{\sqrt{k}}-\frac{1}{\sqrt{k+1}}\right).$$

Khi đó

$$\frac{1}{\sqrt{1^3}+\sqrt{1}}+\frac{1}{\sqrt{2^3}+\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3^3}+\sqrt{3}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{n^3}+\sqrt{n}}$$
$$<2\left(1-\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{1}{\sqrt{3}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{n}}-\frac{1}{\sqrt{n+1}}\right)=2\left(1-\frac{1}{\sqrt{n+1}}\right)<2. \square$$

b) Đặt $a=x^2-2xy-y, b=xy-2y^2-x, c=2x^2+y^2+2x+y$.

Ta có $a-b=(x-y)(x-2y+1)$.

Do a và b chia hết cho 5 nên $a-b$ chia hết cho 5.

Suy ra $x-y \vdots 5$ hoặc $x-2y+1 \vdots 5$.

- **Trường hợp 1:** Nếu $x-y \vdots 5$ thì $x \equiv y \pmod 5$. Khi đó
  $a \equiv x^2-2x^2-x=-(x^2+x) \pmod 5$;

  $c \equiv 2x^2+x^2+2x+x=3(x^2+x) \pmod 5$.

Do $a \vdots 5$ nên $x^2 + x \vdots 5$ hay $c \vdots 5$.

- **Trường hợp 2:** Nếu $x - 2y + 1 \vdots 5$ thì $x \equiv 2y - 1 (\bmod 5)$. Khi đó

$$a \equiv (2y-1)^2 - 2(2y-1)y - y = -3y + 1 (\bmod 5);$$

$$c \equiv 2(2y-1)^2 + y^2 + 2(2y-1) + y \equiv 9y^2 - 3y \equiv 3y(3y-1)(\bmod 5).$$

Do $a \vdots 5$ nên $3y - 1 \vdots 5$ hay $c \vdots 5$. ❐

Câu 2 a) Đặt $y = \sqrt{2x - x^2} = \sqrt{1 - (x-1)^2}$. Suy ra: $\begin{cases} 0 \le y \le 1 \\ (x-1)^2 = 1 - y^2 \end{cases}$.

Ta được: $\sqrt{1+y} + \sqrt{1-y} = 2\left(1 - y^2\right)^2 \left(1 - 2y^2\right)$ (1)

Mặt khác: $\sqrt{1+y} + \sqrt{1-y} \ge 1 + \sqrt{1-y^2} \ge 2 - y^2$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra: $2\left(1-y^2\right)^2\left(1-2y^2\right) \ge 2 - y^2$.

Đặt $t = y^2$ ta được: $0 \le t \le 1$ và

$$2\left(1-t\right)^2\left(1-2t\right) \ge 2 - t \Leftrightarrow t\left(4t^2 - 10t + 7\right) \le 0 \Leftrightarrow t \le 0$$

Do đó: $t = 0$. Suy ra: $y = 0$ hay $\sqrt{2x - x^2} = 0 \Leftrightarrow 2x - x^2 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = 2 \end{array}\right.$.

Vậy tập nghiệm của phương trình đã cho là $S = \{0;1\}$. ❐

b) Điều kiện $\begin{cases} x + y \ge 0 \\ x - y \ge 0 \end{cases}$.

Đặt $u = \sqrt{\dfrac{x+y}{2}}$, $v = \sqrt{\dfrac{x-y}{2}}$; $u, v \ge 0$. Suy ra: $x = u^2 + v^2$, $y = u^2 - v^2$.

Hệ phương trình đã cho thành:

$$\begin{cases} \dfrac{2\left(u^2+v^2\right)\left(u^2-v^2\right) + \left(u^2-v^2\right)\sqrt{4u^2v^2}}{14} = u + v \\ u^3 + v^3 = 9 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (u+v)\left(u^3 - v^3 - 7\right) = 0 \\ u^3 + v^3 = 9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u + v = 0 \\ u^3 + v^3 = 9 \end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases} u^3 - v^3 = 7 \\ u^3 + v^3 = 9 \end{cases}.$$

- Hệ phương trình $\begin{cases} u + v = 0 \\ u^3 + v^3 = 9 \end{cases}$ vô nghiệm.

- $\begin{cases} u^3 - v^3 = 7 \\ u^3 + v^3 = 9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u^3 = 8 \\ v^3 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u = 2 \\ v = 1 \end{cases}$. Khi đó

$$\begin{cases} \sqrt{\dfrac{x+y}{2}} = 2 \\ \sqrt{\dfrac{x-y}{2}} = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y=8 \\ x-y=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=5 \\ y=3 \end{cases}.$$

Vậy phương trình đã cho có nghiệm duy nhất là $(5;3)$. ❒

Câu 3. Phương trình hoành độ giao điểm của (P) và d là

$$2x^2 = -2mx + m + 1 \Leftrightarrow 2x^2 + 2mx - m - 1 = 0 \quad (*)$$

Ta có $\Delta' = m^2 + 2m + 2 > 0, \forall m$. Suy ra phương trình (*) luôn có 2 nghiệm phân biệt với mọi m. Điều này có nghĩa là d cắt (P) tại 2 điểm phân biệt với mọi m.

Theo định lí Vi-ét ta có $x_1 + x_2 = -m; x_1x_2 = -\dfrac{m+1}{2}$.

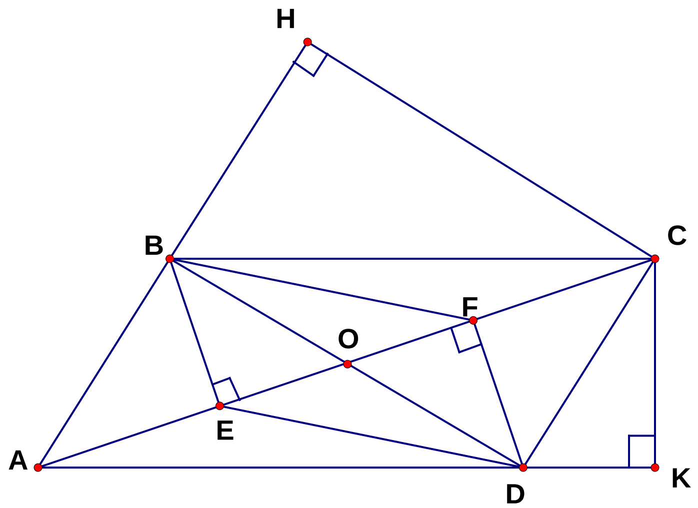
Khi đó

$$P = -\frac{1}{(2x_1-1)^2} - \frac{1}{(2x_2-1)^2} = -\frac{4(x_1+x_2)^2 - 8x_1x_2 - 4(x_1+x_2) + 2}{\left[4x_1x_2 - 2(x_1+x_2) + 1\right]^2}$$

$$= -4m^2 - 8m - 6 = -(2m+1)^2 - 2 \le -2.$$

Vậy $\max P = -2$ khi và chỉ khi $m = -\dfrac{1}{2}$. ❒

Câu 4



a) Ta có $BE \perp AC$ (giả thiết) và $DF \perp AC$ (giả thiết). Suy ra $BE // DF$.

Chứng minh $\triangle BEO = \triangle DFO$ (g – c – g). Suy ra $BE = DF$.

Do đó tứ giác $BEDF$ là hình bình hành.

Ta có $\widehat{ABC} = \widehat{ADC} \Rightarrow \widehat{HBC} = \widehat{KDC}$.

Chứng minh : $\triangle CBH \sim \triangle CDK$ (g – g) $\Rightarrow \dfrac{CH}{CB} = \dfrac{CK}{CD} \Rightarrow CH.CD = CK.CB$.

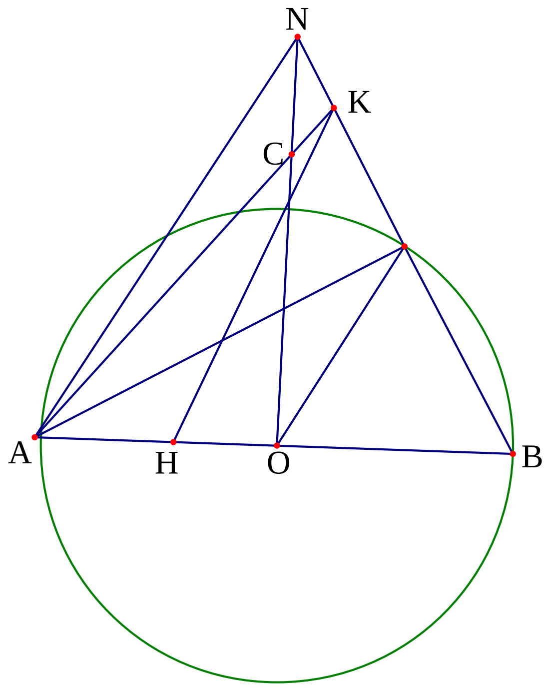
b) Chứng minh : $\triangle AFD \sim \triangle AKC$ (g – g)$\Rightarrow \dfrac{AF}{AD} = \dfrac{AK}{AC} \Rightarrow AD.AK = AF.AC$.

Chứng minh : $\triangle CFD \sim \triangle AHC$ (g – g)$\Rightarrow \dfrac{CF}{CD} = \dfrac{AH}{AC}$.

Mà $CD = AB$ nên $\dfrac{CF}{AB} = \dfrac{AH}{AC} \Rightarrow AB.AH = CF.AC$.

Do đó $AB.AH + AB.AH = CF.AC + AF.AC = \left(CF + AF\right)AC = AC^2$. ❐

Câu 5



a) Ta có tam giác NAB cân tại N (ON là trung trực của AB)

$\Rightarrow \widehat{NAB} = \widehat{NBA}$ (1)

Lại có $OM = OB = R \Rightarrow \widehat{NBA} = \widehat{BOM}$ (2)

Do H, I là trung điểm của OA, AM nên HI là đường trung bình của $\triangle AOM$.

Suy ra $HI // OM \Rightarrow \widehat{BMO} = \widehat{KHB}$ (3)

Từ (1),(2) và (3) suy ra: $\widehat{NAB} = \widehat{HKB}$.

Do đó tứ giác $AHKN$ nội tiếp hay các điểm A, H, K, N cùng thuộc một đường tròn.

b) Ta có

$AH = HO = \dfrac{AO}{2} = \dfrac{R}{2}$.

$KH // OM \Rightarrow \dfrac{KH}{MB} = \dfrac{OH}{OB} = \dfrac{R}{2R} = \dfrac{1}{2}$.

Đặt $MB = x > 0 \Rightarrow MK = \dfrac{x}{2}$.

Áp dụng định lý Pythagore trong các tam giác vuông AKM và AMB, ta có:

$AK^2 - KM^2 = AM^2 = AB^2 - BM^2 \Leftrightarrow \left(\dfrac{R\sqrt{10}}{2}\right)^2 - \dfrac{x^2}{4} = 4R^2 - x^2 \Leftrightarrow x = R\sqrt{2}$

$\Rightarrow \sin\widehat{MAB} = \dfrac{MB}{AB} = \dfrac{R\sqrt{2}}{2R} = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \widehat{MAB} = 45^0$.

Mặt khác

$$\widehat{CAB} = \frac{1}{2}\text{sđ}\,\overset{\frown}{BC} = \frac{1}{4}\text{sđ}\,\overset{\frown}{AB} = 45^0 \Rightarrow \widehat{MAB} = \widehat{CAB} \Rightarrow M \equiv C.$$

Vậy khi $M \equiv C$ thì $AK = \dfrac{R\sqrt{10}}{2}$. ❐

Câu 6

Ta có

$$\frac{1}{a} + 6b = \frac{ab + bc + ca}{a} + 6b = b + \frac{bc}{a} + c + 6b = 7b + c + \frac{bc}{a}$$

Tương tự

$$\frac{1}{b} + 6c = 7c + a + \frac{ca}{b}\ ;\ \frac{1}{c} + 6a = 7a + b + \frac{ab}{c}.$$

Do đó $P = \left(\dfrac{1}{a} + 6b\right) + \left(\dfrac{1}{b} + 6c\right) + \left(\dfrac{1}{c} + 6a\right) = 8(a + b + c) + \left(\dfrac{bc}{a} + \dfrac{ca}{b} + \dfrac{ab}{c}\right)$.

Mặt khác, áp dụng bất đẳng thức AM – GM ta có

$$\frac{bc}{a} + \frac{ca}{b} \geq 2c\ ;\ \frac{ca}{b} + \frac{ab}{c} \geq 2a\ ;\ \frac{ab}{c} + \frac{bc}{a} \geq 2b.$$

Suy ra

$$a + b + c \leq \frac{bc}{a} + \frac{ca}{b} + \frac{ab}{c}.$$

$$P=8(a+b+c)+\left(\frac{bc}{a}+\frac{ca}{b}+\frac{ab}{c}\right)=6(a+b+c)+\left(\frac{bc}{a}+\frac{ca}{b}+\frac{ab}{c}\right)+2(a+b+c)$$

Suy ra $\leq\left[6(a+b+c)+\left(\frac{bc}{a}+\frac{ca}{b}+\frac{ab}{c}\right)\right]+2\left(\frac{bc}{a}+\frac{ca}{b}+\frac{ab}{c}\right)$

$$=6(a+b+c)+3\left(\frac{bc}{a}+\frac{ca}{b}+\frac{ab}{c}\right)=3\left[2(a+b+c)+\left(\frac{bc}{a}+\frac{ca}{b}+\frac{ab}{c}\right)\right]$$

$$=3\left[\frac{2(a+b+c)abc+b^2c^2+c^2a^2+a^2b^2}{abc}\right]=3\frac{(ab+bc+ca)^2}{abc}=3.\frac{1}{abc}.$$

Do đó:

$$\frac{\left(\frac{1}{a}+6b\right)+\left(\frac{1}{b}+6c\right)+\left(\frac{1}{c}+6a\right)}{3}\leq\frac{1}{abc}\qquad(1)$$

Mặt khác

$$\left(\frac{\sqrt[3]{\frac{1}{a}+6b}+\sqrt[3]{\frac{1}{b}+6c}+\sqrt[3]{\frac{1}{c}+6a}}{3}\right)^3\leq\frac{\left(\frac{1}{a}+6b\right)+\left(\frac{1}{b}+6c\right)+\left(\frac{1}{c}+6a\right)}{3}$$

$$\Rightarrow\left(\frac{\sqrt[3]{\frac{1}{a}+6b}+\sqrt[3]{\frac{1}{b}+6c}+\sqrt[3]{\frac{1}{c}+6a}}{3}\right)^3\leq\frac{1}{abc}$$

$$\Rightarrow\sqrt[3]{\frac{1}{a}+6b}+\sqrt[3]{\frac{1}{b}+6c}+\sqrt[3]{\frac{1}{c}+6a}\leq\frac{3}{\sqrt[3]{abc}}\qquad(2)$$

Áp dụng bất đẳng thức AM – GM ta có:

$$\sqrt[3]{ab.bc.ca}\leq\frac{ab+bc+ca}{3}=\frac{1}{3}\Rightarrow 3\sqrt[3]{(abc)^2}\leq 1$$

Vì thế, $\frac{3}{\sqrt[3]{abc}}=\frac{3\sqrt[3]{(abc)^2}}{\sqrt[3]{(abc)^3}}=\frac{3\sqrt[3]{(abc)^2}}{abc}\leq\frac{1}{abc}\qquad(3)$

Từ (2) và (3) suy ra $\sqrt[3]{\frac{1}{a}+6b}+\sqrt[3]{\frac{1}{b}+6c}+\sqrt[3]{\frac{1}{c}+6a}\leq\frac{1}{abc}$. ❐

Câu 7

Giả sử A có n số và sắp xếp chúng theo thứ tự $1 = x_1 < x_2 < ... < x_n$.

Suy ra với mỗi $k \in \{1;2;3;...;n\}$ ta có

$$x_{i+1} = x_i + x_j \le x_k + x_k = 2x_k \text{ với } 1 \le i, j \le k.$$

Áp dụng kết quả trên ta thu được

$$x_2 \le 1+1 = 2, x_3 \le 2+2 = 4, x_4 \le 8, x_5 \le 16, x_6 \le 32, x_7 \le 64.$$

Suy ra tập A phải có ít nhất 8 phần tử.

- Giả sử $n = 8$ suy ra $x_8 = 100$.
  Vì $x_6 + x_7 \le 32 + 64 = 96$ nên $x_8 = 2x_7 \Rightarrow x_7 = 50$.

  Vì $x_5 + x_6 \le 16 + 32 = 48$ nên $x_7 = 2x_6 \Rightarrow x_6 = 50$.

  Vì $x_4 + x_5 \le 8 + 16 = 24$ nên $x_6 = 2x_5 \Rightarrow x_5 = \frac{25}{2}$ (mâu thuẫn).

- Giả sử $n = 9$ ta có tập $\{1;2;3;5;10;20;25;50;100\}$ thỏa mãn yêu cầu bài toán. ❐

===Hết===

BỘ ĐỀ LUYỆN THI VÀO LỚP 10 CHUYÊN TOÁN

HƯỚNG DẪN GIẢI ĐỀ SỐ 15

Câu 1

a) **<u>Cách 1</u>**

$\forall k \in \mathbb{N}^*$ ta có $\frac{1}{k^2(k+2)\sqrt{k+1}} = \frac{1}{2k\sqrt{k+1}}.\frac{2}{k(k+1)} = \frac{1}{2k\sqrt{k+1}}\left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+2}\right)$

$$= \frac{1}{2k^2\sqrt{k+1}} - \frac{1}{2k(k+2)\sqrt{k+1}} < \frac{1}{2k^2\sqrt{k+1}} - \frac{1}{2(k+1)^2\sqrt{k+2}}.$$

Khi đó

$$\frac{1}{1^2.3.\sqrt{2}}+\frac{1}{2^2.4.\sqrt{3}}+\frac{1}{3^2.5.\sqrt{4}}+...+\frac{1}{n^2\left(n+2\right)\sqrt{n+1}}$$

$$<\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{2k^2\sqrt{k+1}}-\frac{1}{2\left(k+1\right)^2\sqrt{k+2}}\right)=\frac{1}{2\sqrt{2}}-\frac{1}{2\left(n+1\right)^2\sqrt{n+2}}<\frac{1}{2\sqrt{2}}.$$

<u>Cách 2</u>

Ta có: $2k^2=k^2+k^2\geq k^2+1$ với mọi $k\in\mathbb{N}^*$.

Suy ra:

$k\sqrt{2}\geq\sqrt{k+1}\Rightarrow\frac{1}{k^2(k+2)\sqrt{k+1}}\leq\frac{\sqrt{2}}{2k\left(k+1\right)\left(k+2\right)}=\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{1}{k\left(k+1\right)}-\frac{1}{\left(k+1\right)\left(k+2\right)}\right)$ Khi đó

$$\frac{1}{1^2.3.\sqrt{2}}+\frac{1}{2^2.4.\sqrt{3}}+\frac{1}{3^2.5.\sqrt{4}}+...+\frac{1}{n^2\left(n+2\right)\sqrt{n+1}}$$

$$\leq\frac{\sqrt{2}}{2}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k\left(k+1\right)}-\frac{1}{\left(k+1\right)\left(k+2\right)}\right)=\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{\left(n+1\right)\left(n+2\right)}\right)<\frac{1}{2\sqrt{2}}.$$ ❐

b) Ta có: $m^3+n^3-4\equiv0\left(\bmod p\right)\Leftrightarrow -mn\left(m+n\right)-4\equiv0\left(\bmod p\right)$

$$\Leftrightarrow 3mn\left(m+n\right)+12\equiv0\left(\bmod p\right)$$

Kết hợp với $m^3+n^3-4\equiv0\left(\bmod p\right)$ suy ra:

$$\left(m+n\right)^3+8\equiv0\left(\bmod p\right)\Leftrightarrow\left(m+n+2\right)\left[m^2+n^2+2nm-2\left(m+n\right)+4\right]\equiv0\left(\bmod p\right)$$

Do p là số nguyên tố nên ta có 2 khả năng:

- **Trường hợp 1:** Nếu $m+n+2\,\vdots\left(m^2+n^2\right)$ thì

$$m^2+n^2\leq m+n+2\Leftrightarrow m\left(m-1\right)+n\left(n-1\right)\leq2\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m=n=1\\m=2,n=1.\\m=1,n=2\end{array}\right.$$

Thử lại ta thấy: bộ số $\left(m,n\right)$ là $\left(1;1\right),\left(2;1\right),\left(1;2\right)$ thỏa bài toán.

- **Trường hợp 2:** Nếu $m^2+n^2+2nm-2\left(m+n\right)+4\,\vdots\left(m^2+n^2\right)$ thì

$$2nm-2\left(m+n\right)+4\,\vdots\left(m^2+n^2\right)$$

Do $2nm-2\left(m+n\right)+4=2\left[\left(m-1\right)\left(n-1\right)+1\right]>0\Rightarrow 2nm-2\left(m+n\right)+4\geq m^2+n^2$

(chỉ xảy ra khi $m=n=1$). ❐

Câu 2

a) Điều kiện: $x \neq \pm\sqrt{3}, x \neq 1$.

Phương trình đã cho được viết lại như sau:

$$\frac{(x-1)^4}{(x^2-3)^2} + (x^2-3)^4 + \frac{1}{(x-1)^2} = (x-1)^2 + 2(x^2-3).$$

Đặt $u = (x-1)^2 > 0$; $v = x^2 - 3$.

Phương trình đã cho trở thành: $\frac{u^2}{v^2} + v^4 + \frac{1}{u} = u + 2v$ (1)

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy-Swachz ta có:

$$\left(\frac{u^2}{v^2} + v^4 + \frac{1}{u}\right)(v^2 + u + 1) \geq (u + v^2 + 1)^2$$

$$\Rightarrow \frac{u^2}{v^2} + v^4 + \frac{1}{u} \geq u + v^2 + 1 \geq u + 2v \qquad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra: $\begin{cases} \frac{u}{v} = v^2 = \frac{1}{u} \\ v = 1 \end{cases} \Leftrightarrow u = v = 1$.

Khi đó: $\begin{cases} (x-1)^2 = 1 \\ x^2 - 3 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow x = 2$.

Vậy phương trình đã cho có nghiệm duy nhất là $x = 2$. ❐

b) Điều kiện: $3x - y \geq 0$; $3x + \sqrt{3x - y} \geq 0$; $y \neq 0$.

Ta có: $\frac{6x}{y} - 2 = \sqrt{3x-y} + 3y \Leftrightarrow \frac{2(3x-y)}{y} - 3y = \sqrt{3x-y} \Leftrightarrow \frac{2(3x-y)}{y^2} - 3 = \frac{\sqrt{3x-y}}{y}$.

Đặt $t = \frac{\sqrt{3x-y}}{y}$. Khi đó: $2t^2 - t - 3 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = -1 \\ t = \frac{3}{2} \end{array}\right.$.

- Với $t = -1$ ta có: $\sqrt{3x-y} = -y \Leftrightarrow \begin{cases} y < 0 \\ 3x - y = y^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y < 0 \\ 3x = y^2 + y \end{cases}$.

Thay vào phương trình thứ hai của hệ ta được:

$$2\sqrt{y^2} = 2y^2 + 5y - 4 \Leftrightarrow 2|y| = 2y^2 + 5y - 4 \Leftrightarrow -2y = 2y^2 + 5y - 4$$

$$\Leftrightarrow 2y^2+7y-4=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y=-4 \Rightarrow x=4 \\ y=\dfrac{1}{2}>0 \end{array}\right. .$$

- Với $t=\dfrac{3}{2}$ ta có: $\sqrt{3x-y}=\dfrac{3}{2}y \Leftrightarrow \begin{cases} y>0 \\ 3x=\dfrac{9}{4}y^2+y \end{cases}.$

Thay vào phương trình thứ hai ta được: $2\sqrt{\dfrac{9}{4}y^2+\dfrac{5}{2}y}=\dfrac{9}{2}y^2+5y-4$.

Đặt $u=\sqrt{\dfrac{9}{4}y^2+y}$, $u>0$. Ta có: $2u^2-2u-4=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} u=2 \\ u=-1<0 \end{array}\right.$.

Với $u=2$ suy ra: $9y^2+10y-16=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y=\dfrac{8}{9} \Rightarrow x=\dfrac{8}{9} \\ y=-2<0 \end{array}\right.$.

Vậy hệ phương trình đã cho có 2 nghiệm là: $(4;-4),\left(\dfrac{8}{9};\dfrac{8}{9}\right)$. ❒

Câu 3

$A\in(P)\Rightarrow A(x_A;x_A^2)$; $B\in(P)\Rightarrow B(x_B;x_B^2)$ (với $x_A<0, x_B>0$).

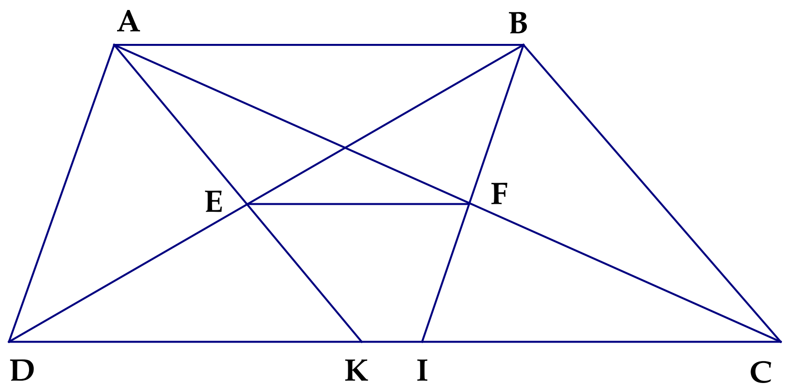
$\triangle OAB$ đều $\Leftrightarrow \begin{cases} OA^2=OB^2 \\ OA^2=AB^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_A^2+x_A^4=x_B^2+x_B^2 \\ x_A^2+x_A^4=(x_B-x_A)^2+(x_B^2-x_A^2)^2 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (x_A^2-x_B^2)(x_A^2+x_B^2+1)=0 \\ x_A^2+x_A^4=(x_B-x_A)^2+(x_B^2-x_A^2)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_B=-x_A \\ x_A^2+x_A^4=(2x_A)^2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_A=-\sqrt{3} \\ x_B=\sqrt{3} \end{cases} \text{(do } x_A<0 \text{ và } x_B>0\text{).}$$

Vậy $A\left(-\sqrt{3};3\right), B\left(\sqrt{3};3\right)$. ❒

Câu 4



a) Tứ giác $ABCK$ có:

$AB \,//\, CK$ ($AB \,//\, CD$, $K \in CD$)

$AK \,//\, BC$ (giả thiết)

$\Rightarrow$ $ABCK$ là hình bình hành

$\Rightarrow$ $CK = AB$

$\Rightarrow$ $DK = CD - CK = CD - AB$ (1)

Chứng minh tương tự, ta có $DI = AB$

$\Rightarrow$ $IC = CD - DI = CD - AB$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra: $DK = IC$

ΔDEK có $AB \,//\, DK$, theo hệ quả định lý Ta-let ta có:

$$\frac{AE}{EK} = \frac{AB}{DK} \quad (3)$$

ΔFIC có $AB \,//\, IC$, theo hệ quả định lý Ta-let ta có:

$$\frac{AF}{FC} = \frac{AB}{IC} \quad (4)$$

Do $DK = IC$ nên từ (3) và (4) suy ra $\frac{AE}{EK} = \frac{AF}{FC}$.

Do đó $EF \,//\, KC$ hay $EF \,//\, CD$.

b) Do $AB = CK$ nên $\frac{AB}{CD} = \frac{CK}{CD}$ (5)

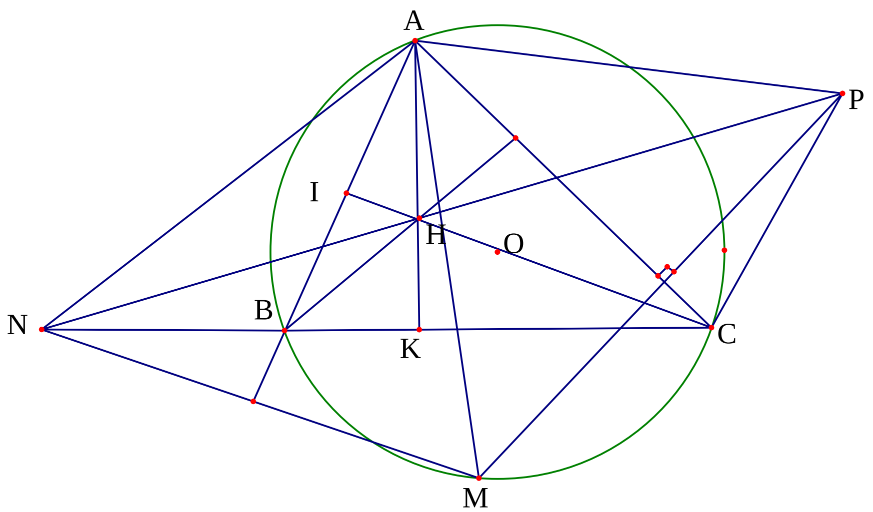
ΔBCD có $EK \,//\, BC$ nên $\frac{CK}{CD} = \frac{BE}{BD}$ (6)

ΔBDI có $EF \,//\, DI$ nên $\frac{BE}{BD} = \frac{EF}{DI}$

Mà $DI = AB$ nên $\dfrac{BE}{BD} = \dfrac{EF}{AB}$ (7)

Từ (5), (6) và (7) suy ra: $\dfrac{AB}{CD} = \dfrac{CK}{CD} = \dfrac{BE}{BD} = \dfrac{EF}{AB}$ hay $AB^2 = CD.EF$. ❒

Câu 5



a) Gọi I là giao điểm của CH và AB , K là giao điểm của AH với BC .

Dễ thấy $\widehat{BIK} + \widehat{AHC} = 180^0$ (1)

Mặt khác, $\widehat{IBK} = \widehat{AMC}; \widehat{AMC} = \widehat{APC}$. Do đó $\widehat{IBK} = \widehat{APC}$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra: $\widehat{APC} + \widehat{AHC} = 180^0$.

Do đó tứ giác $AHPC$ nội tiếp $\Rightarrow \widehat{AHP} = \widehat{ACP}$.

Mà $\widehat{ACP} = \widehat{AMP}$ nên $\widehat{AHP} = \widehat{ACM}$.

Mặt khác, $\widehat{ACM} = \widehat{ABM} = 180^0$ nên $\widehat{AHP} = \widehat{ABM} = 180^0$.

Mà $\widehat{AMB} = \widehat{ABN}$ nên $\widehat{AHP} = \widehat{ABN} = 180^0$ (3)

Tương tự, $\widehat{ABN} = \widehat{AHN}$ (4)

Từ (3) và (4) suy ra: $\widehat{AHB} + \widehat{AHN} = 180^0$.

Vậy N, H, P thẳng hàng.

b) Ta có $\widehat{MAN} = 2\widehat{BAM}$; $\widehat{MAP} = 2\widehat{MAC}$.

Khi đó $\widehat{NAP} = 2\left(\widehat{BAM} + \widehat{MAC}\right) = 2\widehat{BAC}$ (không đổi) .

Ta có $NP = 2AP.\sin\widehat{BAC} = 2AM.\sin\widehat{BAC}$.

NP lớn nhất khi và chỉ khi AM lớn nhất, tức AM là đường kính của đường tròn (O) .

Vậy NP lớn nhất khi và chỉ khi M là điểm đối xứng của A qua O . ❒

Câu 6

Đặt $a=\frac{1}{x};b=\frac{1}{y};\ c=\frac{1}{z}\Rightarrow a,b,c>0$ và $a+b+c=1$.

Bất đẳng thức cần chứng minh tương đương:

$$\sqrt{a+bc}+\sqrt{b+ac}+\sqrt{c+ab}\ge\sqrt{ab}+\sqrt{bc}+\sqrt{ca}+1.$$

$$\sqrt{a+bc}=\sqrt{a(a+b+c)+bc}=\sqrt{a^2+a(b+c)+bc}\ge\sqrt{a^2+2a\sqrt{bc}+bc}$$

$$\Rightarrow\sqrt{a+bc}\ge\sqrt{\left(a+\sqrt{bc}\right)^2}=a+\sqrt{bc}\qquad(1)$$

Tương tự ta có: $\sqrt{b+ac}\ge b+\sqrt{ac}$ (2)

$$\sqrt{c+ab}\ge c+\sqrt{ab}\qquad(3)$$

Cộng vế theo vế các bất đẳng thức (1), (2) và (3) trên ta có:

$$\sqrt{a+bc}+\sqrt{b+ac}+\sqrt{c+ab}\ge\sqrt{ab}+\sqrt{bc}+\sqrt{ca}+a+b+c$$

$$\Leftrightarrow\sqrt{a+bc}+\sqrt{b+ac}+\sqrt{c+ab}\ge\sqrt{ab}+\sqrt{bc}+\sqrt{ca}+1.$$

Dấu đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow a=b=c=\frac{1}{3}$ hay $x=y=z=3$. ❒

Câu 7

Sắp xếp các số đã cho theo thứ tự tăng dần: $1\le a_1<a_2<a_3<...<a_{700}$.

Bổ sung thêm các số a_2+3,a_i+9 ($i=1,2,...,700$) rồi lập bảng sau:

Cột / Dòng	1	2	3	…	674	675
1	a_1	a_2	a_3	…	a_{674}	a_{675}
2	a_1+3	a_2+3	a_3+3	…	$a_{674}+3$	$a_{675}+3$
3	a_1+9	a_2+9	a_3+9	…	$a_{674}+9$	$a_{675}+9$

Bảng trên gồm 675 cột, 3 dòng nên gồm 2025 số tự nhiên, mỗi x_i trong bảng đều thỏa mãn $1<x_i<2017+9=2026$ ($i=1,2,3,...,2100$).

Do đó x_i nhận tối đa là 2024 giá trị nên có ít nhất 2 số bằng nhau.

Mặt khác, các số trong một dòng đôi một khác nhau, các số trong một cột cũng đôi một khác nhau. Khi đó

$\exists$ hai số $a_i + x = a_j + y$ với $x, y \in \{0;3;9\}$, $i \neq j \in \{1;2;...;675\}$

$\Leftrightarrow a_i - a_j = y - x \Leftrightarrow \left|a_i - a_j\right| = \left|y - x\right| \in \{3;6;9\}$.

Vậy ta hoàn tất việc chứng minh. ❒

===Hết===

BỘ ĐỀ LUYỆN THI VÀO LỚP 10 CHUYÊN TOÁN

HƯỚNG DẪN GIẢI ĐỀ SỐ 16

Câu 1 a) Ta có

$$\sqrt{6-4\sqrt{2}} = \sqrt{\left(2-\sqrt{2}\right)^2} = 2-\sqrt{2}\,;\ \sqrt[3]{20+14\sqrt{2}} = \sqrt[3]{\left(2+\sqrt{2}\right)^3} = 2+\sqrt{2}\,;$$

$$\sqrt[3]{(a+3)\sqrt{a}-3a-1} = \sqrt[3]{a\sqrt{a}-3a+3\sqrt{a}-1} = \sqrt[3]{\left(\sqrt{a}-1\right)^3} = \sqrt{a}-1.$$

Khi đó

$$P = \left(2-\sqrt{2}\right)\left(2+\sqrt{2}\right) + \left(\sqrt{a}-1\right) : \frac{\left(\sqrt{a}-1\right)^2}{2\left(\sqrt{a}-1\right)} = 4-2+2 = 4. \ ❒$$

b) Gọi $l_1, l_2, ..., l_s$ là các ước lẻ của n và 2^m là lũy thừa lớn nhất của 2 trong khai triển của n ($s \geq 1, m \geq 0$).

Từ đó các ước của n là $l_1, l_2, ..., l_s, 2l_1, 2l_2, ..., 2l_s, ..., 2^m l_1, 2^m l_2, ..., 2^m l_s$.

Theo đề bài ta có:

$$l_1 + l_2 + ... + l_s + 2l_1 + 2l_2 + ... + 2l_s + ... + 2^m l_1 + 2^m l_2 + ... + 2^m l_s + \left(m+1\right)s = 2n+1$$

$$\Leftrightarrow \left(l_1 + l_2 + ... + l_s\right)\left(1 + 2 + 2^2 + ... + 2^m\right) + \left(m+1\right)s = 2n+1$$

$$\Leftrightarrow \left(l_1 + l_2 + ... + l_s\right)\left(2^{m+1} - 1\right) + \left(m+1\right)s = 2n+1 \qquad (*)$$

- Nếu s chẵn thì vế trái của (*) chẵn, vô lý. Suy ra s lẻ.
- Nếu s lẻ mà m chẵn thì vế trái của (*) cũng chẵn, vô lý. Do đó m lẻ

tức $m = 2t+1$. Suy ra $\frac{n}{2^m}$ có số ước lẻ.

Số $\dfrac{n}{2^m}=p_1^{k_1}p_2^{k_2}...p_m^{k_m}$ có số ước là $(k_1+1)(k_2+1)...(k_m+1)$ suy ra k_i chẵn $(i=\overline{1,m})$

$\Rightarrow \dfrac{n}{2^m}$ là số chính phương $\Rightarrow n=2^{2t+1}.r^2 \Rightarrow \dfrac{n}{2}=(2^t r)^2$ với $t,r\in\mathbb{N}$. ❒

Câu 2 a) Điều kiện: $x\ge -\dfrac{4}{9}$.

Với điều kiện trên, phương trình đã cho tương đương với:

$$2\sqrt[4]{\frac{(9x+4)^2}{3}+4}=1+\sqrt{\frac{3(9x+4)}{2}}\ .$$

Đặt $y=9x+4$ ($y\ge 0$).

Khi đó

$$2\sqrt[4]{\frac{y^2}{3}+4}=1+\sqrt{\frac{3y}{2}}\Leftrightarrow 4\sqrt{\frac{y^2}{3}+4}=1+\frac{3y}{2}+\sqrt{6y}\ .$$

Áp dụng bất đẳng thức AM – GM ta được: $\sqrt{6y}\le\dfrac{y+6}{2}$.

Suy ra $4\sqrt{\dfrac{y^2}{3}+4}\le 2y+4\Leftrightarrow 2\sqrt{\dfrac{y^2}{3}+4}\le y+2\Leftrightarrow (y-6)^2\le 0\Leftrightarrow y=6\Rightarrow x=\dfrac{2}{9}$.

Vậy phương trình đã cho có nghiệm duy nhất $x=\dfrac{2}{9}$. ❒

b) Từ phương trình thứ hai của hệ ta suy ra: $\begin{cases}\dfrac{x^2}{8y}+\dfrac{2x}{3}+\dfrac{y}{2}\ge 0\\ \dfrac{x}{3y}+\dfrac{1}{4}\ge 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}y>0\\ x+\dfrac{3}{4}y\ge 0\end{cases}$.

Ta có $x^2+y^2+\dfrac{8xy}{x+y}=16\Leftrightarrow (x+y)^2-16-2xy+\dfrac{8xy}{x+y}=0$

$\Leftrightarrow (x+y-4)\left[(x+y)^2+4(x+y)-2xy\right]=0$

$\Leftrightarrow (x+y-4)\left[x^2+y^2+4(x+y)\right]=0$ (*)

Do $x+y>x+\dfrac{3}{4}y\ge 0\Rightarrow (*)\Leftrightarrow x+y=4$ thay vào phương trình thứ nhất của hệ ta có

Mặt khác, do $\dfrac{2x}{3}+\dfrac{y}{2}=\dfrac{2}{3}\left(x+\dfrac{3}{4}y\right)>0$ nên áp dụng bất đẳng thức AM – GM ta có:

$$\frac{x^2}{8y}+\left(\frac{2x}{3}+\frac{y}{2}\right)\geq 2\sqrt{\frac{x^2}{8y}\left(\frac{2x}{3}+\frac{y}{2}\right)}=\sqrt{\frac{x^3}{3y}+\frac{x^2}{4}}.$$

Suy ra phương trình thứ hai của hệ $\Leftrightarrow \frac{x^2}{8y}=\frac{2x}{3}+\frac{y}{2}$.

Do đó hệ đã cho $\Leftrightarrow \begin{cases} x+y=4 \\ \frac{x^2}{8y}=\frac{2x}{3}+\frac{y}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y=4 \\ 3x^2-16xy-12y^2=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y=4 \\ x=6y, x=-\frac{2}{3}y \end{cases}$.

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=\frac{24}{7} \\ y=\frac{4}{7} \end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases} x=-8 \\ y=12 \end{cases}.$$

Vậy hệ phương trình đã cho có 2 nghiệm là $\left(\frac{24}{7};\frac{4}{7}\right),(-8;12)$. ❒

Câu 3 Ta có $d\cap Ox=A\left(-\frac{b}{a};0\right)$; $d\cap Oy=B(0;b)$.

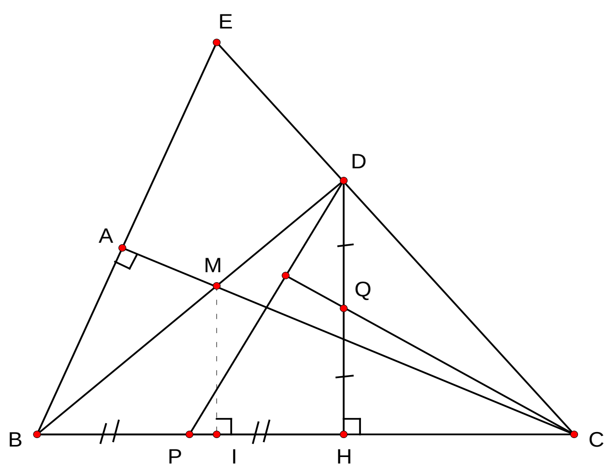
Vì d đi qua $M(2;7)$ nên $2a+b=7$. Suy ra $-\frac{b}{a}=2-\frac{7}{a}$.

Do $a|7$, $-\frac{b}{a}$ là số nguyên âm và b là số nguyên dương nên a là số nguyên dương. Suy ra $a\in\{1;7\}$.

- Với $a=1$ thì $b=5$ (thỏa mãn).
- Với $a=7$ thì $b=-7$ (loại).

Vậy $\begin{cases} a=1 \\ b=5 \end{cases}$ thỏa mãn yêu cầu bài toán. ❒

Câu 4



a) Chứng minh $\triangle EBD \sim \triangle ECA$ (g – g) $\Rightarrow \dfrac{EB}{EC} = \dfrac{ED}{EA} \Rightarrow EA.EB = ED.EC$.

Kẻ $MI \perp BC$ $(I \in BC)$.

Ta có $\triangle BIM \sim \triangle BDC$ (g – g) $\Rightarrow \dfrac{BM}{BC} = \dfrac{BI}{BD} \Rightarrow BM.BD = BI.BC$ (1)

Tương tự, $\triangle ACB \sim \triangle ICM$ (g – g) $\Rightarrow \dfrac{CM}{BC} = \dfrac{CI}{CA} \Rightarrow CM.CA = CI.BC$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra $BM.BD + CM.CA = BI.BC + CI.BC = BC.(BI + CI) = BC^2$.

Do đó tổng $BM.BD + CM.CA$ có giá trị không đổi.

b) Chứng minh $\triangle BHD \sim \triangle DHC$ (g – g) $\Rightarrow \dfrac{BH}{DH} = \dfrac{BD}{DC} \Rightarrow \dfrac{2BP}{2DQ} = \dfrac{BD}{DC} \Rightarrow \dfrac{BP}{DQ} = \dfrac{BD}{DC}$.

Chứng minh $\triangle DPB \sim \triangle CQD$ (c – g – c) $\Rightarrow \widehat{BDP} = \widehat{DCQ}$.

Mà $\widehat{BDP} + \widehat{PDC} = 90^o$ nên $\widehat{DCQ} + \widehat{PDC} = 90^o \Rightarrow CQ \perp PD$. ❐

Câu 5

a) Vì (O) và (C) tiếp xúc trong tại A nên A, C, O thẳng hàng.

Vì (O) và (C) tiếp xúc trong tại B nên B, D, O thẳng hàng.

Xét (C) có $\widehat{ANP} = \dfrac{1}{2}\widehat{ACP}$.

Do tam giác ACP cân tại C và tam giác AOB cân tại O nên

$\widehat{APC} = \widehat{ABO}\left(= \widehat{CPA}\right) \Rightarrow CP // OB \Rightarrow \widehat{ACP} = \widehat{AOB} \Rightarrow \widehat{ANP} = \dfrac{1}{2}\widehat{AOB}$ (1)

Tương tự, ta có $DP // OA \Rightarrow \widehat{BDP} = \widehat{AOB} \Rightarrow \widehat{BNP} = \dfrac{1}{2}\widehat{AOB}$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra $\widehat{ANP} = \widehat{BNP}$.

Gọi H là giao điểm của NP và CD; I là giao điểm của OP và CD.

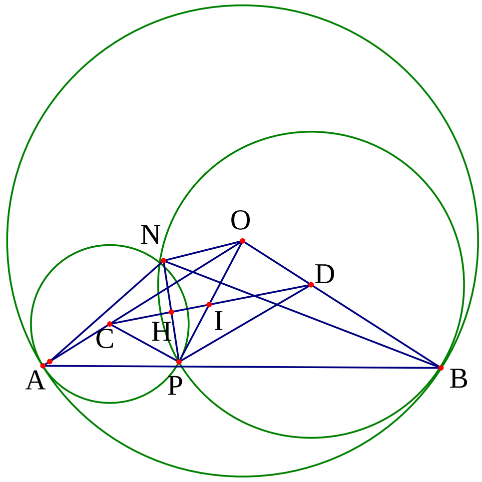
Theo chứng minh trên ta có $CP // OB$, $DP // OC$. Suy ra tứ giác $CPDO$ là hình bình hành.

Do đó $IO = IP$, (C) và (D) cắt nhau tại P và N suy ra $CD \perp NP$ (3)

Do $HN = HP$ nên HI là đường trung bình của tam giác $PNO \Rightarrow HI // NO$

hay $CD // NO$ (4)

Từ (3) và (4), suy ra $NO \perp NP \Leftrightarrow \widehat{PNO} = 90^0$.



b) Theo chứng minh trên ta có: $\widehat{ANB} = \widehat{ANP} + \widehat{PNB} \Rightarrow \widehat{ANB} = \widehat{AOB}$ (5)

Dễ thấy N, O thuộc nửa mặt phẳng bờ AB (6)

Từ (5) và (6) suy ra điểm N thuộc cung tròn $\overset{\frown}{AOB}$ của đường tròn ngoại tiếp tam giác AOB. Do A, B, O cố định nên N thuộc cung tròn cố định. ❒

Câu 6

Ta có $a^2 + b^2 + c^2 + (a+b+c)^2 \le 4 \Leftrightarrow a^2 + b^2 + c^2 + ab + bc + ca \le 2$.

Ta chứng minh $\dfrac{2ab+2}{(a+b)^2} + \dfrac{2bc+2}{(b+c)^2} + \dfrac{2ca+2}{(c+a)^2} \ge 6$.

Thật vậy, vì $2 \ge a^2 + b^2 + c^2 + ab + bc + ca$ nên ta có

Suy ra $\dfrac{2ab+2}{(a+b)^2} \ge 1 + \dfrac{(c+a)(c+b)}{(a+b)^2}$ (1)

Tương tự ta có

$$\frac{2bc+2}{(b+c)^2} \ge 1 + \frac{(a+b)(c+a)}{(b+c)^2} \quad (2)$$

$$\frac{2ca+2}{(c+a)^2} \ge 1 + \frac{(a+b)(b+c)}{(c+a)^2} \quad (3)$$

Cộng vế theo vế (1), (2) và (3) ta được

$$\frac{2ab+2}{(a+b)^2} + \frac{2bc+2}{(b+c)^2} + \frac{2ca+2}{(c+a)^2} \ge 3 + \frac{(c+a)(b+c)}{(a+b)^2} + \frac{(a+b)(c+a)}{(b+c)^2} + \frac{(b+c)(a+b)}{(c+a)^2}.$$

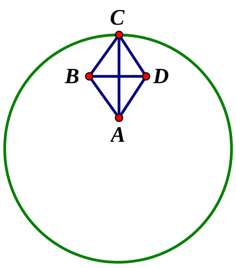
Áp dụng bất đẳng thức AM – GM cho 3 số dương ta có

$$\frac{(c+a)(b+c)}{(a+b)^2}+\frac{(a+b)(c+a)}{(b+c)^2}+\frac{(b+c)(a+b)}{(c+a)^2}\geq 3\ .$$

Suy ra điều phải chứng minh.

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$. ❒

Câu 7



Xét hình thoi $ABCD$ cạnh 1 cm có $\widehat{A}=60^0$.

Ta có $\triangle ABD$ đều, do đó $AB=BC=CD=DA=BD=1$ cm.

Bốn điểm A,B,C,D được tô bằng 3 màu nên tồn tại hai điểm cùng màu.

Nếu một trong năm đoạn thẳng AB,BC,CD,DA,BD có hai đầu cùng màu thì bài toán được chứng minh. Không xảy ra điều trên thì đoạn thẳng AC có hai đầu cùng màu.

Xét hình thoi $ABCD$, A cố định. Nếu không có đoạn thẳng nào trong năm đoạn thẳng AB,BC,CD,DA,BD có hai đầu cùng màu thì C cùng màu với A. Ta có các điểm của đường tròn tâm A, bán kính $AC=\sqrt{3}$ cm được tô cùng màu.

Dây cung $MN=1$ cm của đường tròn $(A;\sqrt{3}$ cm) trên có M,N cùng màu. ❒

===Hết===

BỘ ĐỀ LUYỆN THI VÀO LỚP 10 CHUYÊN TOÁN

HƯỚNG DẪN GIẢI ĐỀ SỐ 17

Câu 1

a) Đặt $ax^3=by^3=cz^3=k$. Khi đó

$$\sqrt[3]{ax^2+by^2+cz^2}=\sqrt[3]{\frac{ax^3}{x}+\frac{by^3}{y}+\frac{cz^3}{z}}=\sqrt[3]{k\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)}=\sqrt[3]{k} \qquad (1)$$

$$\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}+\sqrt[3]{c}=\sqrt[3]{\frac{k}{x^3}}+\sqrt[3]{\frac{k}{y^3}}+\sqrt[3]{\frac{k}{z^3}}=\sqrt[3]{k}\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)=\sqrt[3]{k} \qquad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra

$$\sqrt[3]{ax^2+by^2+cz^2}=\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}+\sqrt[3]{c}\,.\ \square$$

b) Giả sử a,b,c là các số nguyên và n là một số nguyên dương sao cho

$$(a-b)(b-c)(c-a)+4=2.2018^{2019n}.$$

Đặt $a-b=-x$; $b-c=-y$ và ta viết lại phương trình trên như sau

$$xy(x+y)+4=2.2018^{2019n} \qquad (1)$$

Nếu $n\geq 1$ thì vế phải của (1) chia hết cho 7, vì thế ta có

$$xy(x+y)+4\equiv 0 \pmod 7.$$

Suy ra

$$3xy(x+y)\equiv 2 \pmod 7 \qquad (2)$$

hay

$$(x+y)^3-x^3-y^3\equiv 2 \pmod 7.$$

Để ý rằng với mọi số nguyên k, ta có $k^3\equiv -1;0;1 \pmod 7$.

Từ (1) suy ra một trong các số $(x+y)^3, x^3$ và y^3 phải có số chia hết cho 7. Do 7 là số nguyên tố nên một trong các số $x+y,x,y$ phải có số chia hết cho 7. Suy ra $xy(x+y)$ chia hết cho 7 . Đây là một điều mâu thuẫn với (2).

Vì vậy, chỉ có thể là $n=0$. Khi đó

$$xy(x+y)+4=2 \Leftrightarrow xy(x+y)=-2 \Leftrightarrow xy(x+y)=1.(-2)=(-2).1=(-1).2=2.(-1)$$

Xét các trường hợp sau:

- $\begin{cases} xy=1 \\ x+y=-2 \end{cases} \Leftrightarrow x=y=-1.$
- $\begin{cases} xy=-2 \\ x+y=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2 \\ y=-1 \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} x=-1 \\ y=2 \end{cases}$.
- $\begin{cases} xy=-1 \\ x+y=2 \end{cases}$ (không có nghiệm nguyên)
- $\begin{cases} xy=2 \\ x+y=-1 \end{cases}$ (vô nghiệm)

Vậy bộ ba số thỏa mãn yêu cầu bài toán là $(a,b,c)=(k+2,k+1,k)$ (với $k\in\mathbb{Z}$) cùng các hoán vị. ❒

Câu 2

a) Điều kiện: $-\frac{7}{2}\le x\le\frac{3}{2}$.

Với điều kiện trên, phương trình đã cho tương đương với

$$\left(6-2\sqrt{2x+7}\right)+\left(2\sqrt{-2x+3}-2\right)=x^2-1$$

$$\Leftrightarrow \frac{4-4x}{3+\sqrt{2x+7}}+\frac{4-4x}{\sqrt{-2x+3}+1}=x^2-1$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ \dfrac{4}{3+\sqrt{2x+7}}+\dfrac{4}{\sqrt{-2x+3}+1}=-x-1 \quad (1) \end{array}\right.$$

$$(1)\Leftrightarrow \left(\frac{4}{3+\sqrt{2x+7}}-1\right)+\left(\frac{4}{\sqrt{-2x+3}+1}-1\right)=-x-3$$

$$\Leftrightarrow \frac{-2x-6}{\left(3+\sqrt{2x+7}\right)\left(1+\sqrt{2x+7}\right)}+\frac{2x+6}{\left(\sqrt{-2x+3}+1\right)\left(\sqrt{-2x+3}+3\right)}=-x-3$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-3 \\ \dfrac{-2}{\left(3+\sqrt{2x+7}\right)\left(1+\sqrt{2x+7}\right)}+\dfrac{2}{\left(\sqrt{-2x+3}+1\right)\left(\sqrt{-2x+3}+3\right)}=-1 \quad (2) \end{array}\right.$$

(2) vô nghiệm vì $VT(2)>\dfrac{-2}{\left(3+\sqrt{2x+7}\right)\left(1+\sqrt{2x+7}\right)}\ge-\dfrac{2}{3}>VP(2)$.

Vậy tập nghiệm của phương trình đã cho là $S=\{1;-3\}$.

b) Điều kiện: $\begin{cases} 2x-y\ge 0 \\ y\ge 0 \end{cases}$.

Từ phương trình thứ hai của hệ có:

$$x+\sqrt{2x-y}+3\sqrt{y}=y+4\Leftrightarrow 2x-y+2\sqrt{2x-y}+1=y-6\sqrt{y}+9$$

$$\Leftrightarrow\left(\sqrt{2x-y}+1\right)^2=\left(\sqrt{y}-3\right)^2\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\sqrt{2x-y}+4-\sqrt{y}=0\\ \sqrt{2x-y}+\sqrt{y}=2\end{array}\right..$$

Từ phương trình đầu của hệ suy ra

$$\sqrt{4x^2-6xy+3y^2}\le 4$$

$$\Rightarrow\left(2x-\frac{3y}{2}\right)^2+\frac{3y^2}{4}\le 16\Rightarrow y^2\le\frac{64}{3}\Rightarrow\sqrt{y}\le\sqrt[4]{\frac{64}{3}}<4\ .$$

Do đó nếu hệ cho có nghiệm $(x;y)$ thì $\sqrt{2x-y}+4-\sqrt{y}>0$.

Xét trường hợp $\sqrt{2x-y}+\sqrt{y}=2$, ta có:

$$\left(\sqrt{2x-y}+\sqrt{y}\right)^2=4\Leftrightarrow 2x+2\sqrt{2xy-y^2}=4\Leftrightarrow\sqrt{2xy-y^2}=2-x$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}x\le 2\\ 2xy-y^2=(2-x)^2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\le 2\\ (x-y)^2=4x-4\end{cases}\qquad(1)$$

Mặt khác, thay $\sqrt{2xy-y^2}=2-x$ vào phương trình thứ hai của hệ có

$$\sqrt{4x^2-6xy+3y^2}=2+x\Leftrightarrow\begin{cases}x\ge -2\\ 4x^2-6xy+3y^2=(2+x)^2\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}x\ge -2\\ 3(x-y)^2=4x+4\end{cases}\qquad(2)$$

Kết hợp (1) và (2) ta có

$$\begin{cases}-2\le x\le 2\\ (x-y)^2=4x-4\\ 3(x-y)^2=4x+4\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=2\\ (x-y)^2=4\end{cases}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=2,y=0\\ x=2,y=4\end{array}\right..$$

Vậy hệ phương trình đã cho có hai nghiệm $(x;y)$ là $(2;0),(2;4)$. ❒

Câu 3

d luôn đi qua điểm cố định $A(1;3)$ với mọi m.

Kẻ $OH\perp d$ tại H. Ta có $OH\le OA$ (OA không đổi)

Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $H\equiv A$.

Phương trình đường thẳng OA có dạng $y=ax$.

$A(1;3)\in OA\Leftrightarrow 3=a.1\Leftrightarrow a=3$. Suy ra $y=3x$.

$OA\perp d\Leftrightarrow 3.(m-2)=-1\Leftrightarrow m=\dfrac{5}{3}$.

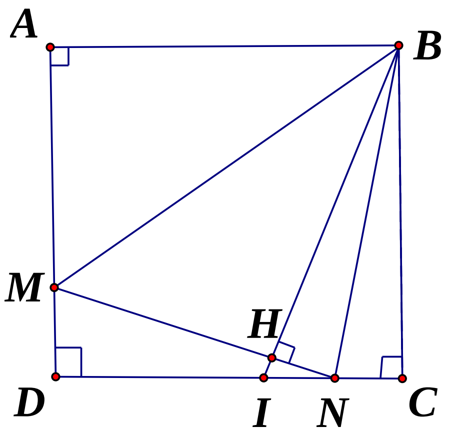
Vậy $m=\dfrac{5}{3}$ thỏa mãn yêu cầu bài toán. ❒

Câu 4

a) Trên cạnh BI lấy điểm H sao cho $BH = BA = a$.

$\Rightarrow \Delta ABM = \Delta HBM$ và $\Delta HBN = \Delta CBN$

Suy ra $\widehat{BHM} = \widehat{BAM} = 90^0$; $\widehat{BHN} = \widehat{BCN} = 90^0$.



Suy ra M; H; N thẳng hàng, do đó

$MN = MH + HN = AM + NC$.

b) Đặt $NC = x \Rightarrow MN = AM + NC = \frac{3}{4}a + x$;

$DN = a - x$

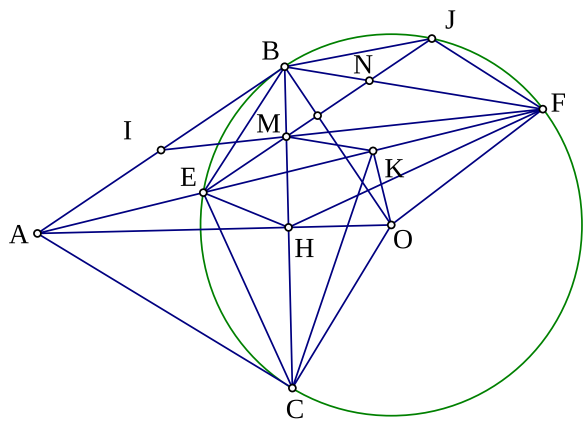
Theo định lí Pitago

$MN^2 = MD^2 + DN^2 \Rightarrow \left(\frac{3}{4}a + x\right)^2 = \frac{a^2}{16} + (a - x)^2$ Giải

và tìm được $x = \frac{a}{7}$

Diện tích tam giác BMN bằng $\frac{1}{2}BH.MN = \frac{1}{2}a\left(\frac{3}{4}a + \frac{a}{7}\right) = \frac{25}{56}a^2$. ❒

Câu 5



a) Do 5 điểm A, B, K, O, C cùng nằm trên một đường tròn nên $\widehat{CKO} = \widehat{OBC}$.

Mà $\widehat{EKC} = 90^0 - \widehat{CKO}$ suy ra $\widehat{EKC} = 90^0 - \widehat{OBC} = \widehat{BMJ} = \widehat{EMC}$ hay tứ giác $EMKC$ nội tiếp.

b) Kéo dài FM cắt AB tại I.

Ta chứng minh I là trung điểm của AB.

Do tứ giác $EMKC$ nội tiếp nên $\widehat{EKM} = \widehat{ECM}$.

Mà $\widehat{ECM} = \widehat{EFB}$ suy ra $\widehat{EKM} = \widehat{EFB} \Leftrightarrow MK // FB$.

Suy ra M là trung điểm của EN.

Áp dụng định lý Thales ta có: $\dfrac{ME}{AI}=\dfrac{MN}{BI}=\dfrac{FM}{FI}$.

Mà $ME=MN$ nên $AI=BI$.

Vậy đường thẳng FM đi qua trung điểm của AB. ❒

Câu 6

Ta có $\sqrt{8(a+b)(b+c)(c+a)}\le\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}\right)\sqrt{8(a+b)(b+c)(c+a)}$

$$=\sqrt{(4ab+4ac)\left[2(a+b)(a+c)\right]}+\sqrt{(4ab+4bc)\left[2(b+a)(b+c)\right]}$$
$$+\sqrt{(4ac+4bc)\left[2(c+a)(c+b)\right]}$$

Áp dụng bất đẳng thức AM-GM ta được:

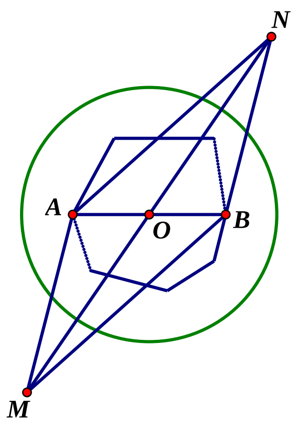
$$\sqrt{(4ab+4ac)\left[2(a+b)(a+c)\right]}\le\frac{1}{2}\left[4ab+4ac+2(a+b)(a+c)\right]$$

Cộng vế theo vế với các bất đẳng thức tương tự ta được

$$\sqrt{8(a+b)(b+c)(c+a)}\le\frac{1}{2}\left[4ab+4ac+2(a+b)(a+c)\right]$$
$$+\frac{1}{2}\left[4ab+4bc+2(b+a)(b+c)\right]$$
$$+\frac{1}{2}\left[4ac+4bc+2(c+a)(c+b)\right]$$
$$=4(ab+bc+ca)+\left(a^2+ab+ac+bc\right)+\left(b^2+bc+ab+ac\right)+\left(c^2+ac+bc+ab\right)$$
$$=a^2+b^2+c^2+7(ab+bc+ca).$$

Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c=\dfrac{1}{9}$. ❒

Câu 7



Chọn hai điểm A,B thuộc đường gấp khúc khép kín (T) đã cho, AB chia (T) thành hai phần có độ dài bằng nhau và bằng $\dfrac{1}{2}$.

Gọi O là trung điểm của AB. Dựng đường tròn $\left(O;\dfrac{1}{4}\right)$.

Giả sử có ít nhất một điểm M thuộc (T) và ở ngoài hình tròn $\left(O;\dfrac{1}{4}\right)$. Gọi N là điểm đối xứng của M qua O.

Tứ giác $AMBN$ là hình bình hành nên $AM=BN$.

Do đó $AM+BM=BN+BM>MN=2.OM>\dfrac{1}{2}$. (1)

Mà $AM + BM \le \frac{1}{2}$ (nửa độ dài của đường gấp khúc đã cho là $\frac{1}{2}$). (2)

Từ (1) và (2) dẫn đến mâu thuẫn. Điều giả sử ở trên là sai.

Vậy ta hoàn tất chứng minh. ❒

===Hết===

BỘ ĐỀ LUYỆN THI VÀO LỚP 10 CHUYÊN TOÁN

HƯỚNG DẪN GIẢI ĐỀ SỐ 18

Câu 1

a) Ta có

$1 + x^2 = xy + x + y + x^2 = (x+y)(x+1)$

$1 + y^2 = xy + x + y + y^2 = (x+y)(y+1)$

$x + y + xy = 1 \Leftrightarrow (x+1)(y+1) = 2$.

Khi đó

$$P = 2x\sqrt{\frac{y+1}{x+1}} + 2y\sqrt{\frac{x+1}{y+1}} + (x+y)\sqrt{(x+1)(y+1)}$$

$$= \frac{2x(y+1)}{\sqrt{2}} + \frac{2y(x+1)}{\sqrt{2}} + \sqrt{2}(x+y)$$

$$= \sqrt{2}\left[x(y+1) + y(x+1) + x + y\right]$$

$$= 2\sqrt{2}\left(xy + x + y\right) = 2\sqrt{2}.$$ ❒

b) Gọi (x_0, y_0) là một nghiệm nguyên dương của phương trình đã cho sao cho $x_0 + y_0$ đạt giá trị nhỏ nhất.

Không mất tính tổng quát, giả sử rằng $x_0 \ge y_0 \ge 1$.

Xét phương trình bậc hai ẩn x:

$$x^2 + y_0^2 + x + y_0 = kxy_0 \Leftrightarrow x^2 + (1 - ky_0)x + y_0^2 + y_0 = 0.$$

Rõ ràng phương trình này có một nghiệm là x_0. Gọi nghiệm còn lại là x_1. Theo định lý Viete ta có

$$\begin{cases} x_0 + x_1 = ky_0 - 1 \\ x_0 x_1 = y_0^2 + y_0 \end{cases}.$$

Do $x_0, k, y_0 \in \mathbb{Z}^+$ nên $x_1 = ky_0 - 1 - x_0 \in \mathbb{Z}$. Lại do $y_0^2 + y_0 > 0$ nên $x_1 \in \mathbb{Z}^+$.

Điều này có nghĩa là (x_1, y_0) cũng là một nghiệm thỏa mãn phương trình.

Mặt khác, bởi vì $x_0 + y_0$ nhỏ nhất nên $x_0 + y_0 \le x_1 + y_0$, tức là $x_1 \ge x_0$. Khi đó

$$ky_0 - 1 - x_0 \ge x_0 \Leftrightarrow ky_0 - 1 \ge 2x_0 \Rightarrow \frac{2x_0}{y_0} + \frac{1}{y_0} \le k.$$

Từ $x^2 + y_0^2 + x + y_0 = kxy_0$, ta cô lập k và thu được

$$k = \frac{x_0}{y_0} + \frac{y_0}{x_0} + \frac{1}{x_0} + \frac{1}{y_0} = \left(\frac{x_0}{y_0} + \frac{1}{2y_0}\right) + \frac{y_0}{x_0} + \frac{1}{x_0} + \frac{1}{2y_0} \le \frac{k}{2} + 1 + 1 + \frac{1}{2} = k + \frac{5}{2}.$$

Suy ra $k \le 5 \Rightarrow k \in \{1; 2; 3; 4; 5\}$. Xét lần lượt các trường hợp của k:

- Với $k = 1$, ta có $x^2 + y^2 + x + y = xy$. Phương trình này vô nghiệm trên $\mathbb{Z}^+$ bởi vì ta dựa trên đánh giá sau
$$x^2 + y^2 + x + y \ge 2xy + x + y > xy, \forall x, y \in \mathbb{Z}^+.$$
- Với $k = 2$, ta có $x^2 + y^2 + x + y = 2xy \Leftrightarrow (x - y)^2 + x + y = 0$, vô lý vì
$$(x - y)^2 + x + y > 0, \forall x, y \in \mathbb{Z}^+.$$
- Với $k = 3$, ta có $x^2 + y^2 + x + y = 3xy$. Phương trình có nghiệm nguyên dương $(2, 2)$.
- Với $k = 4$, ta có $x^2 + y^2 + x + y = 4xy$. Phương trình có nghiệm nguyên dương $(1,1)$.
- Với $k = 5$, dấu "=" phải đồng thời xảy ra ở các điểm
$$\frac{x}{y} + \frac{1}{2y} = \frac{k}{2} = \frac{5}{2}, \frac{1}{x} = 1, \frac{1}{2y} = 1, \frac{y}{x} = 1.$$

  Dễ dàng không tồn tại các cặp số nguyên dương x, y thỏa mãn các điều kiện nêu trên. Trường hợp này bị loại.

Vậy $k \in \{3, 4\}$ thỏa mãn yêu cầu của bài toán. ❒

Câu 2

a) Điều kiện: $\left[\begin{array}{l} -2\sqrt{2} \le x \le -\sqrt{2} \\ \sqrt{2} \le x \le 2\sqrt{2} \end{array}\right.$.

Áp dụng bất đẳng thức AM-GM ta có

$$\begin{cases} \sqrt{8-x^2} = \frac{1}{2}.\sqrt{(8-x^2).4} \le \frac{1}{2}.\frac{12-x^2}{2} = 3 - \frac{x^2}{4} \\ \sqrt{\frac{x^2-2}{2x^2}} = 2.\sqrt{\frac{x^2-2}{2x^2}.\frac{1}{4}} \le \frac{x^2-2}{2x^2} + \frac{1}{4} = \frac{3}{4} - \frac{1}{x^2} \end{cases}.$$

Khi đó

$$\sqrt{8-x^2} + \sqrt{\frac{x^2-2}{2x^2}} \le \frac{15}{4} - \frac{x^2}{4} - \frac{1}{x^2}.$$

Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi dấu đẳng thức đồng thời ở hai bất đẳng thức trên khi và chỉ khi $x = \pm 2$.

Mặt khác

$$5 - \frac{1+x^2}{x} \ge \frac{15}{4} - \frac{x^2}{4} - \frac{1}{x^2} \Leftrightarrow \left(\frac{x}{2} - 1\right)^2 + \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{2}\right)^2 \ge 0.$$

Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x = 2$.

Vậy phương trình đã cho có nghiệm duy nhất $x = 2$. ❒

b) Đặt $t = x + \sqrt{1+x^2} > x + |x| \ge 0$. Suy ra $x = \frac{t^2-1}{2t}$.

Từ phương trình thứ hai của hệ, ta rút ra $y + \sqrt{1+y^2} = \frac{4}{t} \Rightarrow y = \frac{16-t^2}{8t}$.

Do đó $x + y = \frac{t^2-1}{2t} + \frac{16-t^2}{8t} = \frac{3t^2+12}{8t} = \frac{3}{8}\left(t + \frac{4}{t}\right) \ge \frac{3}{2}$

$x^2 + y^2 + x + y = \frac{21}{8} \Rightarrow \frac{(x+y)^2}{2} + x + y \le \frac{21}{8} \Rightarrow \frac{-7}{2} \le x + y \le \frac{3}{2}$

Từ đó suy ra $x = y = \frac{3}{4}$.

Vậy hệ phương trình đã cho có 2 nghiệm duy nhất $(x; y) = \left(\frac{3}{4}; \frac{3}{4}\right)$. ❒

Câu 3

Ta có $mx - y + 1 = 0 \Leftrightarrow y = mx + 1$.

Phương trình hoành độ giao điểm của (P) và d là

$$\frac{1}{2}x^2 = mx + 1 \Leftrightarrow x^2 - 2mx - 2 = 0 \quad (*)$$

Do $\frac{c}{a} = -2 < 0$ nên phương trình (*) có 2 nghiệm trái dấu. Điều này có nghĩa là d luôn cắt (P) tại hai điểm phân biệt A, B với mọi m.

Gọi x_1, x_2 lần lượt là hoành độ của hai điểm A, B. Do $x_1x_2 < 0$ nên không mất tính tổng quát, giả sử $x_1 > 0$ và $x_2 < 0$.

Theo định lí Vi-ét ta có $x_1 + x_2 = 2m$ và $x_1x_2 = -2$.

$d \cap Oy = C(0;1)$ và C nằm giữa A và B.

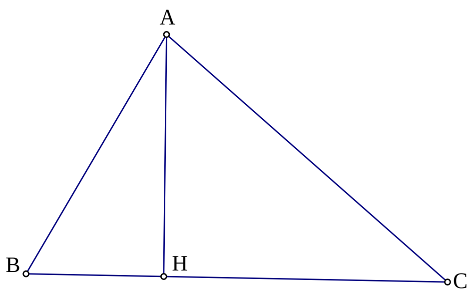
Khi đó

$$S_{AOB} = \frac{3}{2} \Leftrightarrow S_{AOC} + S_{BOC} = \frac{3}{2} \Leftrightarrow \frac{1}{2}|x_1|OC + \frac{1}{2}|x_2|OC = \frac{3}{2} \Leftrightarrow \frac{x_1 - x_2}{2} = \frac{3}{2}$$

$$\Leftrightarrow (x_1 - x_2)^2 = 9 \Leftrightarrow (x_1 + x_2)^2 - 4x_1x_2 = 9 \Leftrightarrow 4m^2 + 8 = 9 \Leftrightarrow m = \pm\frac{1}{2}.$$

Vậy $m = \pm\frac{1}{2}$ thỏa mãn yêu cầu bài toán. ❒

Câu 4



a) Giả sử góc A là góc lớn nhất của $\triangle ABC$. Khi đó B, C là những góc nhọn. Suy ra chân đường cao hạ từ A xuống BC là điểm H thuộc cạnh BC.
Ta có: $BC = BH + HC$. Áp dụng định lý Pythagore trong các tam giác vuông AHB, AHC ta có $AB^2 = AH^2 + HB^2; AC^2 = AH^2 + HC^2$.
Từ hai đẳng thức trên suy ra

$$c^2 - b^2 = HB^2 - HC^2 = (HB + HC)(HB - HC) = a.(HB - HC) \Rightarrow HB - HC = \frac{c^2 - b^2}{a}.$$

Lại có $HB + HC = a \Rightarrow BH = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2a}$.

Áp dụng định lý Pythagore cho tam giác vuông AHB ta có

$$AH^2 = c^2 - \left(\frac{a^2 + c^2 - b^2}{2a}\right)^2 = \left(c - \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2a}\right)\left(c + \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2a}\right)$$

$$=\left[\frac{(a+c)^2-b^2}{2a}\right].\left[\frac{b^2-(a-c)^2}{2a}\right]=\frac{(a+b+c)(a+c-b)(b+a-c)(b+c-a)}{4a^2}$$

Đặt $2p=a+b+c$ là chu vi tam giác ABC. Khi đó

$$AH^2=\frac{16p(p-a)(p-b)(p-c)}{4a^2}\Rightarrow AH=2\frac{\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}}{a}.$$

Vậy $S=\frac{1}{2}BC.AH=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$.

b) Từ câu a) ta có $S=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$.

Áp dụng bất đẳng thức AM – GM ta có:

$$(p-a)(p-b)(p-c)\le\left(\frac{p-a+p-b+p-c}{3}\right)^3=\frac{p^3}{27}.$$

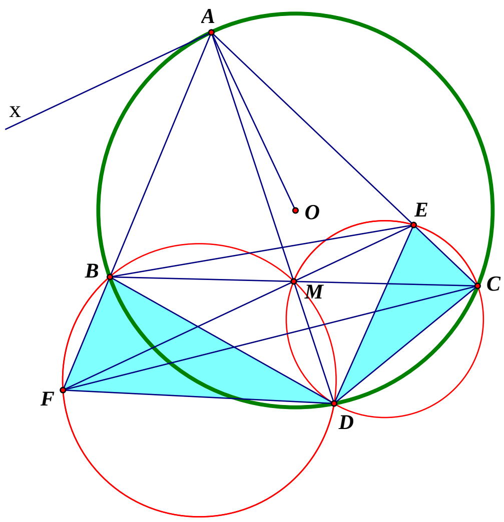
Suy ra $S\le\sqrt{p.\frac{p^3}{27}}=\frac{p^2}{3\sqrt{3}}$ hay $S\le\frac{(a+b+c)^2}{12\sqrt{3}}$.

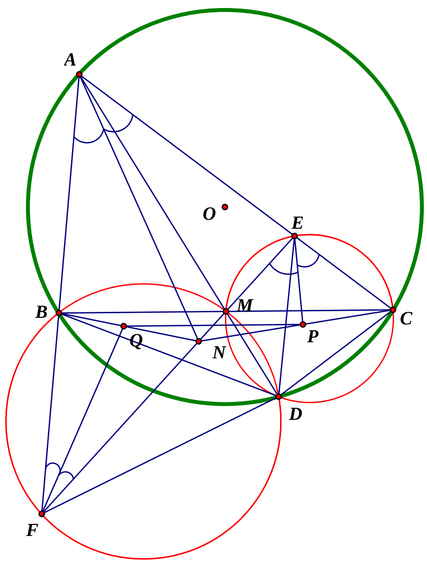
Sử dụng bất đẳng thức quen thuộc $(a+b+c)^2\le3(a^2+b^2+c^2)$

Suy ra $S\le\frac{3(a^2+b^2+c^2)}{12\sqrt{3}}\Leftrightarrow a^2+b^2+c^2\ge4\sqrt{3}S$.

Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi tam giác ABC đều. ❐

Câu 5





a) Do các tứ giác $MECD, MBFD$ nội tiếp nên $\widehat{DEC}=\widehat{DMC}=\widehat{DFB}$ (1)

Tứ giác $ABDC$ nội tiếp nên $\widehat{DCE}=\widehat{DCA}=\widehat{DBF}$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra $\Delta BDF\sim\Delta CDE$ $(g-g)$.

Từ $\Delta BDF \sim \Delta CDE \Rightarrow \widehat{EDC} = \widehat{BDF}$. Mà $\widehat{EMC} = \widehat{EDC}$ và $\widehat{BMF} = \widehat{BDF}$.

Suy ra $\widehat{EMC} = \widehat{BMF}$. Vậy E, M, F thẳng hàng.

Từ hai tứ giác $MECD, MBFD$ nội tiếp nên $AB.AF = AM.AD = AE.AC$, suy ra tứ giác $BECF$ nội tiếp. Do đó $\widehat{AFE} = \widehat{ACB}.$

Vẽ tiếp tuyến Ax của (O) thì $\widehat{ACB} = \widehat{BAx}$. Do đó $\widehat{BAx} = \widehat{AFE}$, suy ra $Ax \parallel EF$.

Vậy $OA \perp EF$.

b) Ta có $\triangle BDF \sim \triangle CDE$ nên $\dfrac{S_{BDF}}{S_{CDE}} = \dfrac{BF^2}{CE^2}$.

Ta có $1 = \dfrac{MB}{MC} = \dfrac{S_{DAB}}{S_{DAC}} = \dfrac{S_{DAB}}{S_{BDF}} . \dfrac{S_{BDF}}{S_{CDE}} . \dfrac{S_{CDE}}{S_{DAC}} = \dfrac{AB}{BF} . \dfrac{BF^2}{CE^2} . \dfrac{CE}{AC} = \dfrac{AB.BF}{CE.AC}$.

Từ đó $\dfrac{BF}{CE} = \dfrac{AC}{AB} = \dfrac{AF}{AE} = \dfrac{NF}{NE} \Rightarrow \dfrac{EN}{EC} = \dfrac{FN}{FB}$

Theo tính chất phân giác ta có $\dfrac{PN}{PC} = \dfrac{EN}{EC}$ và $\dfrac{QN}{QB} = \dfrac{FN}{FB}$ (4).

Từ (3) và (4) suy ra $\dfrac{PN}{PC} = \dfrac{QN}{QB}$. Do đó $PQ // BC$. ❒

Câu 6

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy – Schwarz ta có

$$\sqrt{2}.\left(\sqrt{a+b} + \sqrt{b+c} + \sqrt{c+a}\right)$$

$$= \sqrt{2}\left(\sqrt{\frac{a^2+b^2+2ab}{a+b}} + \sqrt{\frac{b^2+c^2+2bc}{b+c}} + \sqrt{\frac{c^2+a^2+2ac}{c+a}}\right)$$

$$\geq \sqrt{\frac{a^2+b^2}{a+b}} + \sqrt{\frac{b^2+c^2}{b+c}} + \sqrt{\frac{c^2+a^2}{c+a}} + \frac{\sqrt{2ab}}{\sqrt{a+b}} + \frac{\sqrt{2bc}}{\sqrt{b+c}} + \frac{\sqrt{2ca}}{\sqrt{c+a}}$$

$$= \sqrt{\frac{a^2+b^2}{a+b}} + \sqrt{\frac{b^2+c^2}{b+c}} + \sqrt{\frac{c^2+a^2}{c+a}} + \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}} + \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\frac{1}{b}+\frac{1}{c}}} + \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\frac{1}{c}+\frac{1}{a}}}$$

$$\geq \sqrt{\frac{a^2+b^2}{a+b}} + \sqrt{\frac{b^2+c^2}{b+c}} + \sqrt{\frac{c^2+a^2}{c+a}} + \frac{9\sqrt{2}}{\sqrt{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}} + \sqrt{\frac{1}{b}+\frac{1}{c}} + \sqrt{\frac{1}{c}+\frac{1}{a}}}$$

$$\geq \sqrt{\frac{a^2+b^2}{a+b}}+\sqrt{\frac{b^2+c^2}{b+c}}+\sqrt{\frac{c^2+a^2}{c+a}}+\frac{9\sqrt{2}}{\sqrt{6.\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)}}$$

Theo giả thiết $ab+bc+ca\leq 3abc$ nên $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\leq 3$, do đó

$$\frac{9\sqrt{2}}{\sqrt{6.\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)}}\geq \frac{9\sqrt{2}}{\sqrt{18}}=3.$$

Vậy $\sqrt{2}\left(\sqrt{a+b}+\sqrt{b+c}+\sqrt{c+a}\right)\geq \sqrt{\frac{a^2+b^2}{a+b}}+\sqrt{\frac{b^2+c^2}{b+c}}+\sqrt{\frac{c^2+a^2}{c+a}}+3$

Dấu đẳng thức xảy ra khi $a=b=c=1$. ❒

Câu 7

Mỗi "trạng thái trên đảo gồm a con tắc kè xanh, b con tắc kè đỏ và c con tắc kè vàng với $a+b+c=45$.

Phép biến đổi màu sẽ chuyển trạng thái (a,b,c) sang một trong ba trạng thái $(a-1,b-1,c+2),(a-1,b+2,c-1)$ hoặc $(a+2,b-1,c-1)$.

Dễ thấy $(a-1)-(b-1)\equiv(a-1)-(b+2)\equiv(a+2)-(b-1)\equiv a-b(\bmod 3)$.

Bất biến $X=$ sai khác giữa số tắc kè xanh và số tắc kè đỏ theo modulo 3. Khi đó $X\equiv 2(\bmod 3)$ và khi tất cả các tắc kè cùng màu thì $X\equiv 0(\bmod 3)$.

Vậy tình huống tất cả các tắc kè cùng màu không thể xảy ra. ❒

BỘ ĐỀ LUYỆN THI VÀO LỚP 10 CHUYÊN TOÁN

HƯỚNG DẪN GIẢI ĐỀ SỐ 19

Câu 1

a) *Chú ý đến kết quả sau: "Nếu a,b,c là các số thực thỏa mãn điều kiện $a+b+c=0$"*

Sử dụng kết quả này cho bài toán ta có

$(y-z)^3(1-x^3)+(z-x)^3(1-y^3)+(x-y)^3(1-z^3)$

$=3(x-y)(y-z)(z-x)\sqrt[3]{(1-x^3)(1-y^3)(1-z^3)}$ (*).

Đặt $P=(y-z)^3+(z-x)^3+(x-y)^3$; $Q=(xy-zx)^3+(yz-xy)^3+(zx-yz)^3$.

Khi đó

$P=3(x-y)(y-z)(z-x)$ (do $(x-y)+(y-z)+(z-x)=0$).

$Q=3(xy-zx)(yz-xy)(zx-yz)=3xyz(x-y)(y-z)(z-x)$.

Suy ra $P-Q=3(x-y)(y-z)(z-x)(1-xyz)$. Mà $VT(*)$ chính là $P-Q$ cho nên

$$1-xyz=\sqrt[3]{(1-x^3)(1-y^3)(1-z^3)}.$$

Vậy $(1-x^3)(1-y^3)(1-z^3)=(1-xyz)^3$. ❐

b) Đặ $\gcd(x,y)=d$. Khi đó $x=da, y=db$ với $\gcd(a,b)=1$.

Thay $x=da, y=db$ vào phương trình đã cho ta thu được

$$\frac{d^2a^2-db}{8da-d^2b^2}=\frac{db}{da}\Leftrightarrow\frac{da^2-b}{8a-db^2}=\frac{b}{a}\Leftrightarrow da^3-ab=8ab-db^3\Leftrightarrow da^3+db^3=9ab \quad (1)$$

Ta có $\begin{cases} a\,|\,9ab \\ a\,|\,da^3 \end{cases}\Rightarrow a\,|\,db^3\Rightarrow a\,|\,d$ (do $\gcd(a,b)=1$).

Tương tự $b\,|\,d$.

Suy ra $d=kab$ = với $k\in\mathbb{N}^*$. Thay vào (1) ta được

$$kab(a^3+b^3)=9ab\Leftrightarrow k(a^3+b^3)=9.$$

Do $a^3+b^3\ge 2$ nên a^3+b^3 chỉ có thể là 3 hoặc 9. Chắc chắn $a^3+b^3=3$ không có nghiệm, vì vậy $a^3+b^3=9\Rightarrow a=2,b=1$ hoặc $a=1,b=2$. Lúc này $k=1,d=2$.

Do đó ta có nghiệm $(4,2),(2,4)$ nhưng $8x-y^2\ne 0$ nên cặp $(2,4)$ bị loại.

Vậy phương trình đã cho có nghiệm duy nhất là $(4;2)$. ❐

Câu 2

a) **<u>Cách 1</u>**

Điều kiện: $\begin{cases} x\ge 0 \\ x^2-4x+1\ge 0 \end{cases}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l} x\ge 2+\sqrt{3} \\ 0\le x\le 2-\sqrt{3} \end{array}\right.$.

Với điều kiện trên, phương trình đã cho tương đương với:

$$\left(\sqrt{x^2-4x+1}-\frac{x+1}{5}\right)+3\left(\frac{2x+2}{5}-\sqrt{x}\right)=0$$

$$\Leftrightarrow \left[4\sqrt{x^2-4x+1}-(x+1)\right]+3\left[(2x+2)-5\sqrt{x}\right]=0$$

$$\Leftrightarrow \frac{25\left(x^2-4x+1\right)-(x+1)^2}{5\sqrt{x^2-4x+1}+x+1}+3.\frac{(2x+2)^2-25x}{2x+2+5\sqrt{x}}=0$$

$$\Leftrightarrow \frac{6\left(4x^2-17x+4\right)}{5\sqrt{x^2-4x+1}+x+1}+\frac{3\left(4x^2-17x+4\right)}{2x+2+5\sqrt{x}}=0$$

$$\Leftrightarrow 3\left(4x^2-17x+4\right)\left(\underbrace{\frac{2}{5\sqrt{x^2-4x+1}+x+1}+\frac{1}{2x+2+5\sqrt{x}}}_{>0}\right)=0$$

$$\Leftrightarrow 4x^2-17x+4=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=4 \\ x=\dfrac{1}{4} \end{array}\right. \text{(thỏa điều kiện).}$$

Vậy phương trình đã cho có 2 nghiệm là $x=4; x=\dfrac{1}{4}$.

Cách 2

Điều kiện: $\begin{cases} x\ge 0 \\ x^2-4x+1\ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x\ge 2+\sqrt{3} \\ 0\le x\le 2-\sqrt{3} \end{array}\right.$.

- ✓ Nếu $x=0$ thì phương trình đã cho thành $2=0$, vô lý. Do đó $x=0$ không phải là nghiệm của phương trình đã cho.
- ✓ Chia cả hai vế của phương trình cho $\sqrt{x}>0$ ta được:

$$\sqrt{x}+\frac{1}{\sqrt{x}}+\sqrt{x+\frac{1}{x}-4}=3 \quad (*)$$

Đặt $t=\sqrt{x}+\dfrac{1}{\sqrt{x}}\ge 2$ (theo bất đẳng thức AM – GM)

Suy ra $t^2=x+\dfrac{1}{x}+2\Rightarrow x+\dfrac{1}{x}=t^2-2$.

Phương trình (*) thành:

$$t+\sqrt{t^2-6}=3\Leftrightarrow \sqrt{t^2-6}=3-t\Leftrightarrow \begin{cases} 2\le t\le 3 \\ t^2-6=9-6t+t^2 \end{cases}\Leftrightarrow t=\frac{5}{2}.$$

Với $t=\frac{5}{2}$ ta có $\sqrt{x}+\frac{1}{\sqrt{x}}=\frac{5}{2}\Leftrightarrow 2\left(\sqrt{x}\right)^2-5\sqrt{x}+2=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\sqrt{x}=2\\ \sqrt{x}=\frac{1}{2}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=4\\ x=\frac{1}{4}\end{array}\right.$.

Vậy phương trình đã cho có 2 nghiệm là $x=4; x=\frac{1}{4}$. ❒

b) Điều kiện $x\le 2,\ y\ge 1$.

Trừ vế theo vế của hai phương trình trong hệ đã cho ta được:

$$2x^2-2y^2=3xy+x-2y\Leftrightarrow (x-2y)(2x+y-1)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=2y\\ 2x+y=1\end{array}\right..$$

+ Với $x=2y$ thì $2\ge x=2y\ge 2$ nên $x=2; y=1$ (không thỏa hệ).

+ Với $2x+y=1$ thì thay vào phương trình ban đầu ta được:

$6x^2-3x-34+\sqrt{2-x}+\sqrt{-2x}=0$ (Điều kiện $x<0$)

$$\Leftrightarrow 3(x+2)(2x-5)-\frac{x+2}{\sqrt{2-x}+2}-\frac{2(x+2)}{\sqrt{-2x}+2}=0$$

$$\Leftrightarrow (x+2)\left[3(2x-5)-\frac{1}{\sqrt{2-x}+2}-\frac{2}{\sqrt{-2x}+2}\right]=0$$

Vì $x<0$ nên $3(2x-5)-\frac{1}{\sqrt{2-x}+2}-\frac{2}{\sqrt{-2x}+2}<0$.

Do đó phương trình trên có nghiệm $x=-2$. Suy ra $y=5$.

Vậy hệ phương trình đã cho có nghiệm duy nhất là $(-2;5)$. ❒

Câu 3

Phương trình hoành độ giao điểm của (C) và d là

$$|2x-1|=x+m\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}x+m\ge 0\\ \left[\begin{array}{l}2x-1=x+m\\ 2x-1=-x-m\end{array}\right.\end{array}\right.\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}x\ge -m\\ \left[\begin{array}{l}x=m+1\\ x=\frac{1-m}{3}\end{array}\right.\end{array}\right..$$

- Nếu $x=m+1$ thì $m+1\ge -m\Leftrightarrow m\ge -\frac{1}{2}$. Ta có $y=x+m=2m+1$

hay $A(m+1;2m+1)$.

- Nếu $x=\dfrac{1-m}{3}$ thì $\dfrac{1-m}{3}\ge -m \Leftrightarrow m\ge -\dfrac{1}{2}$. Ta có $y=x+m=\dfrac{2m+1}{3}$

hay $B\left(\dfrac{1-m}{3};\dfrac{2m+1}{3}\right)$.

Khi đó

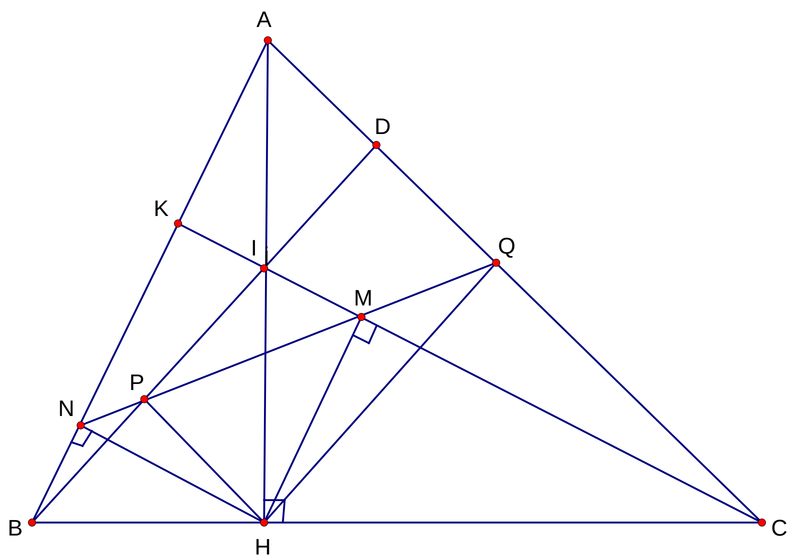
$$AB=4\Leftrightarrow \sqrt{\left(m+1-\dfrac{1-m}{3}\right)^2+\left(2m+1-\dfrac{2m+1}{3}\right)^2}=4$$

$$\Leftrightarrow 4m^2+4m-17=0\Leftrightarrow m=\dfrac{-1\pm 3\sqrt{2}}{2}.$$

So điều kiện chọn $m=\dfrac{-1+3\sqrt{2}}{2}$.

Vậy $m=\dfrac{-1+3\sqrt{2}}{2}$ thỏa mãn yêu cầu bài toán. ❒

Câu 4



a) Xét tam giác BHI có $BH=BI$ và $\widehat{BHI}=90^0$.

Tam giác BHI vuông cân tại $H\Rightarrow \widehat{IBH}=45^0$.

Tam giác AHC có $AH=HC$ và $\widehat{AHC}=90^0$.

Tam giác AHC vuông cân tại $H\Rightarrow \widehat{ACH}=45^0$.

Do đó $\triangle BCD$ vuông cân tại D.

Tam giác ABC có hai đường cao AH, BD.

Vậy I là trực tâm $\triangle ABC$.

b) Xét tứ giác $HMKN$ có $\widehat{M} = \widehat{N} = \widehat{K} = 90^0$.
Do đó tứ giác $HMKN$ là hình chữ nhật.

Dễ dàng chứng minh $\triangle MIH = \triangle NBH$. Suy ra $HM = HN$.

Vậy tứ giác $HMKN$ là hình vuông.

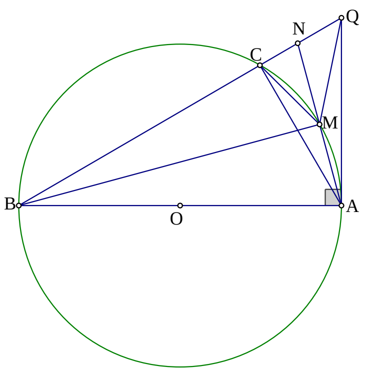
Do $HMKN$ là hình vuông nên M, N thuộc trung trực của đoạn thẳng KH.

Xét hai tam giác vuông AHC và AKC có $HQ = KQ$ $\left(= \frac{1}{2}AC\right)$ nên Q thuộc trung trực KH.

Chứng minh tương tự, P cũng thuộc trung trực KH.

Vậy bốn điểm N, P, M, Q thẳng hàng. ❐

Câu 5



a) Do M là điểm chính giữa $\overset{\frown}{AC}$ nên $\overset{\frown}{MA} = \overset{\frown}{MC}$
Suy ra BM là đường phân giác $\widehat{ABN}$ trong $\triangle ABM$ Mặt khác $\widehat{BMA} = 90^0$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn).
$\triangle BAN$ có BM vừa là đường cao vừa là đường phân giác
$\Rightarrow \triangle BAN$ cân tại $B \Rightarrow \widehat{BAN} = \widehat{BNA}$.
Ta lại có $\widehat{BAN} = \widehat{MCN}$ (vì cùng bù $\widehat{BCM}$).
Do đó $\widehat{BNA} = \widehat{MCN}$ $\Rightarrow \triangle CMN$ cân tại M.

b) Do $MB = MQ$ nên $\triangle BMQ$ cân tại $M \Rightarrow \widehat{MBQ} = \widehat{MQB}$
$\widehat{MCB} = \widehat{MNQ}$ (vì cùng bù với hai góc bằng nhau).
Do đó $\triangle BCM \sim \triangle QNM$ (g.g) $\Rightarrow \frac{BC}{QN} = \frac{CM}{MN} = 1$ hay $QN = BC$.
Xét $\triangle BAQ$ vuông tại A, $AC \perp BQ$ có:
$AB^2 = BC.BQ = BC\left(BN + NQ\right) = BC\left(AB + BC\right)$ (*).
Đặt $BC = x > 0$. Thay $AB = 2R$ vào (*) ta được

$$4R^2 = x\left(2R + x\right) \Leftrightarrow x^2 + 2Rx - 4R^2 = 0$$

Giải phương trình trên ta thu được $BC = \left(\sqrt{5} - 1\right)R$. ❐

Câu 6
Do tính đối xứng của bất đẳng thức nên không mất tổng quát giả sử $a \geq b \geq c \geq 0$.

Áp dụng bất đẳng thức AM – GM, ta có

$$a^3+b^3+c^3+3abc \ge a^3+b^3 \ge 2ab\sqrt{ab} \qquad (1)$$

và

$$(a+b+c)^2 = a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ca \ge 2+2ab \ge 4\sqrt{ab} \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra

$$\left(a^3+b^3+c^3+3abc\right)(a+b+c)^2 \ge 8a^2b^2 \ge 8\max\left\{a^2b^2;b^2c^2;c^2a^2\right\}$$

Hay

$$a^3+b^3+c^3+3abc \ge \frac{8\max\left\{a^2b^2;b^2c^2;c^2a^2\right\}}{(a+b+c)^2}$$

Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=1;c=0$ và các hoán vị. ❒

Câu 7

Gọi a,b,c là số sỏi mỗi đống ban đầu và s là số tiền mà Sisyphus nhận được tại một thời điểm nào đó.

Ta sẽ chứng minh tổng $\frac{a(a-1)}{2}+\frac{b(b-1)}{2}+\frac{c(c-1)}{2}+s$ là bất biến.

Thật vậy, ta di chuyển 1 viên sỏi từ đống có a viên sỏi sang đống có b viên sỏi. Khi đó số tiền Sisyphus nhận được (hoặc mất đi) là $a-b$.

Ta có

$$\frac{(a-1)(a-2)}{2}+\frac{b(b+1)}{2}+\frac{c(c-1)}{2}+s+a-b=\frac{a(a-1)}{2}+\frac{b(b-1)}{2}+\frac{c(c-1)}{2}+s.$$

Do đó đến khi số sỏi trở về như ban đầu thì số tiền Sisyphus nhận được bằng số tiền ban đầu. Mà ban đầu Sisyphus không có tiền do đó đến thời điểm này Sisyphus cũng không có tiền. ❒

===Hết===

BỘ ĐỀ LUYỆN THI VÀO LỚP 10 CHUYÊN TOÁN

HƯỚNG DẪN GIẢI ĐỀ SỐ 20

Câu 1 a) Ta có

$$P=\frac{10x+4-5x+2\sqrt{5x}}{\left(5x+2\sqrt{5x}+4\right)\left(\sqrt{5x}-2\right)}.\left(5x-\sqrt{5x}+1-\sqrt{5x}\right).\frac{6\sqrt{5x}-3-6\sqrt{5x}+6}{\sqrt{5x}-1}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{5x}-2}.\left(\sqrt{5x}-1\right)^2.\frac{3}{\sqrt{5x}-1}=\frac{3\left(\sqrt{5x}-1\right)}{\left(\sqrt{5x}-2\right)}.$$

Theo đề, $P>\frac{7}{2}\Leftrightarrow\frac{3\left(\sqrt{5x}-1\right)}{\sqrt{5x}-2}>\frac{7}{2}\Leftrightarrow\frac{3\left(\sqrt{5x}-1\right)}{\sqrt{5x}-2}-\frac{7}{2}>0\Leftrightarrow\frac{8-\sqrt{5x}}{\sqrt{5x}-2}>0$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}8-\sqrt{5x}>0\\ \sqrt{5x}-2>0\end{cases}\\ \begin{cases}8-\sqrt{5x}<0\\ \sqrt{5x}-2<0\end{cases}\end{array}\right.\Leftrightarrow 2<\sqrt{5x}<8\Leftrightarrow\frac{4}{5}<x<\frac{64}{5}.$$

Do $x\ge 11$ và $x\in\mathbb{Z}$ nên $x\in\{11;12\}$. ❐

b) Biến đổi phương trình về dạng $4x^4-4x^3+1=(2y-1)^2$.

Để ý rằng

$$\begin{aligned}4x^4-4x^3+1&=(2x^2-x)^2+1-x^2\\&=(2x^2-x-1)^2+(x-1)^2+2x^2-1.\end{aligned}$$

Nếu $x^2>1$ thì $(2x^2-x-1)^2<4x^4-4x^3+1<(2x^2-x)^2$ (mâu thuẫn).
Do đó $x^2\le 1$ hay $x\in\{-1;0;1\}$.

- Với $x=-1$, suy ra $y\in\{-1;2\}$.
- Với $x=0$, suy ra $y\in\{0;1\}$.
- Với $x=1$, suy ra $y\in\{0;1\}$.

Vậy $(x,y)\in\{(0,0),(0,1),(1,0),(1,1),(-1,2),(-1,-1)\}$. ❐

Câu 2 a) Điều kiện: $x\ge -1$.

Phương trình đã cho tương đương với

$$x^3+3x^2\sqrt{x+1}-4x\sqrt{x+1}-4\sqrt{x+1}=0$$

$$\Leftrightarrow x^3+4x^2\sqrt{x+1}+x^2+x-\left(x^2\sqrt{x+1}+4x^2+4x+x\sqrt{x+1}+\sqrt{x+1}\right)=0$$

$$\Leftrightarrow x\left(x^2+4x\sqrt{x+1}+x+1\right)-\sqrt{x+1}\left(x^2+4x\sqrt{x+1}+x+1\right)=0$$

$$\Leftrightarrow \left(x-\sqrt{x+1}\right)\left(x^2+4x\sqrt{x+1}+x+1\right)=0$$

$$\Leftrightarrow \left(x-\sqrt{x+1}\right)\left(x+2\sqrt{x+1}\right)^2=0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} x-\sqrt{x+1}=0 & (1) \\ x+2\sqrt{x+1}=0 & (2) \end{array}\right.$$

- $(1)\Leftrightarrow \sqrt{x+1}=x\Leftrightarrow \begin{cases} x\ge 0 \\ x^2-x-1=0 \end{cases}\Leftrightarrow x=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$.
- $(2)\Leftrightarrow 2\sqrt{x+1}=-x\Leftrightarrow \begin{cases} x\le 0 \\ x^2-4x-4=0 \end{cases}\Leftrightarrow x=2-2\sqrt{2}$.

Vậy tập nghiệm của hệ phương trình đã cho là

$$S=\left\{\frac{1+\sqrt{5}}{2};2-2\sqrt{2}\right\}.\ \square$$

b) Điều kiện: $y\ge 1$.

Từ phương trình thứ hai của hệ suy ra $\sqrt[3]{x-1}+x^3-1=\sqrt{y-1}\ge 0\Rightarrow x\ge 1$.

Do $x\ge 1, y\ge 1$ nên $x^4y^4\ge x^2y^2, x^4\ge x^2, y^4\ge y^2$.

Khi đó

$$(x^4+1)(y^4+1)-4xy=x^4y^4+x^4+y^4+1-4xy$$

$$\ge x^2y^2-2xy+1+x^2-2xy+y^2=(xy-1)^2+(x-y)^2\ge 0.$$

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $\begin{cases} x=y=1 \\ xy=1 \\ x=y \end{cases}\Leftrightarrow x=y=1$.

Vậy hệ phương trình đã cho có nghiệm duy nhất $(1;1)$. ❐

Câu 3 Phương trình hoành độ giao điểm của (P) và d là

$$\frac{1}{2}x^2=(m+1)x-m^2-\frac{1}{2}\Leftrightarrow x^2-2(m+1)x+2m^2+1=0 \quad (1)$$

Để d cắt (P) tại hai điểm $A(x_1;y_1),B(x_2;y_2)$ thì phương trình (1) có hai nghiệm.

$$\Delta' \ge 0 \Leftrightarrow (m+1)^2 - 2m^2 - 1 = 2m - m^2 \ge 0 \Leftrightarrow 0 \le m \le 2.$$

Vậy với $0 \le m \le 2$ thì đường thẳng d cắt parabol (P) tại hai điểm

$$A(x_1;y_1),B(x_2;y_2).$$

Khi đó theo định lí Vi-ét thì $\begin{cases} x_1 + x_2 = 2(m+1) \\ x_1x_2 = 2m^2 + 1 \end{cases}$.

Ta có $\begin{cases} y_1 = (m+1)x_1 - m^2 - \dfrac{1}{2} \\ y_1 = (m+1)x_2 - m^2 - \dfrac{1}{2} \end{cases}$.

Do đó

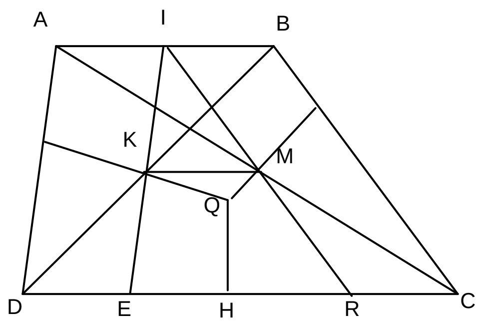
$$\begin{aligned} T = y_1 + y_2 - x_1x_2 &= (m+1)(x_1+x_2) - 2m^2 - 1 - x_1x_2 \\ &= 2(m+1)^2 - 4m^2 - 2 = -2m^2 + 4m = 2 - 2(m-1)^2, \forall m: 0 \le m \le 2 \end{aligned}.$$

Đặt $t = m-1$. Do $0 \le m \le 2$ nên $-1 \le t \le 1$. Suy ra $0 \le t^2 \le 1$.

Suy ra $T = 2 - 2(m-1)^2 = 2 - 2t^2 \ge 0.$

Vậy $\min T = 0 \Leftrightarrow t^2 = 1$ hay $(m-1)^2 = 1 \Leftrightarrow m = 0; m = 2$. ❒

Câu 4



a) Gọi I là trung điểm AB, $E = IK \cap CD$, $R = IM \cap CD$.

Xét hai tam giác KIB và KED có

$$\widehat{ABD} = \widehat{BDC}$$

$KB = KD$ (K là trung điểm BD)

$$\widehat{IKB} = \widehat{EKD}$$

Suy ra $\triangle KIB = \triangle KED \Rightarrow IK = KE$.

Tương tự, $\triangle MIA = \triangle MRC \Rightarrow MI = MR$.

Trong tam giác IER có $IK = KE$ và $MI = MR$ nên KM là đường trung bình

$\Rightarrow KM \,//\, CD$.

Do $CD // AB$ (gt) nên $KM \,//\, AB$.

b) Ta có $IA = IB,\ KB = KD$ (gt)$\Rightarrow$ IK là đường trung bình của $\triangle ADB$.

Suy ra $IK // AD$ hay $IE // AD$.

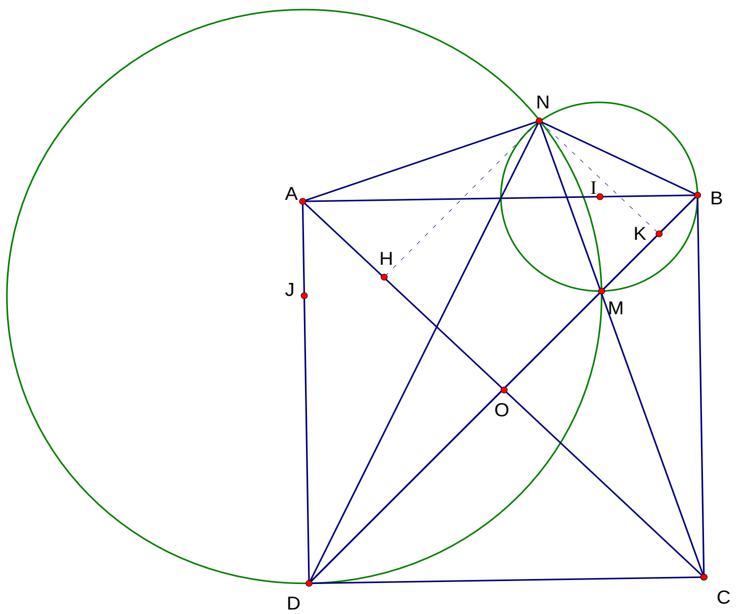
Tương tự, trong $\triangle ABC$ có $IM // BC$ hay $IR // BC$.

Có $QK \perp AD$ (gt), $IE // AD$ (chứng minh trên) $\Rightarrow QK \perp IE$.
Tương tự có $QM \perp IR$.

Từ trên có $IK = KE, QK \perp IE \Rightarrow QK$ là trung trực ứng với cạnh IE của $\triangle IER$. Tương tự QM là trung trực thứ hai của $\triangle IER$.

Hạ $QH \perp CD$ suy ra QH là trung trực thứ ba của $\triangle IER$ hay Q nằm trên trung trực của đoạn CD $\Rightarrow$ Q cách đều C và D hay $QC = QD$. ❐

Câu 5



a) Ta có $\widehat{MNB} = \widehat{MBC}$ (Cùng chắn cung $\overparen{BM}$)

$\widehat{MND} = \widehat{MDC}$ (Cùng chắn cung $\overparen{DM}$)

$\widehat{BND} = \widehat{MNB} + \widehat{MND} = \widehat{MBC} + \widehat{MDC} = 90^\circ$.

Do đó 5 điểm A, B, C, D, M cùng thuộc một đường tròn.

Suy ra NC là phân giác của góc $\widehat{BND}$ (do sđ $\overset{\frown}{BC} =$ sđ $\overset{\frown}{BD}$).

Mặt khác, theo chứng minh trên ta có NM là phân giác của góc $\widehat{BND}$

nên C, M, N thẳng hàng.

b) Gọi H, K lần lượt là hình chiếu của N trên AC và BD. Suy ra $NHOK$ là hình chữ nhật

Ta có : $NA.NC = NH.AC = NH.a\sqrt{2}$; $NB.ND = NK.BD = NK.a\sqrt{2}$

Suy ra $NA.NB.NC.ND = 2a^2.NH.NK \le 2a^2.\dfrac{NH^2 + NK^2}{2} = a^2.NO^2 = \dfrac{a^4}{2}$

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $NH = NK = \dfrac{a}{2} \Leftrightarrow OM = \dfrac{(2-\sqrt{2})a}{2}$. ❒

Câu 6

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy-Schwarz ta có:

$$\sum \frac{yz}{\sqrt{2x^2(y+z)}} = \frac{1}{\sqrt{2}xyz}\sum \frac{y^2z^2}{\sqrt{y+z}} \ge \frac{1}{\sqrt{2}}.\frac{(xy+yz+zx)^2}{xyz\left(\sqrt{y+z}+\sqrt{z+x}+\sqrt{x+y}\right)}$$

$$\ge \frac{1}{2\sqrt{3}}.\frac{(xy+yz+zx)^2}{xyz\sqrt{x+y+z}} \ge \frac{1}{2\sqrt{3}}.\frac{3xyz(x+y+z)}{xyz\sqrt{x+y+z}}$$

$$= \frac{1}{2}\sqrt{3(x+y+z)} \ge \frac{1}{2}\left(\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z}\right) = \frac{1}{2}.$$

Lại áp dụng bất đẳng thức Cauchy-Schwarz ta có:

$$\sum \frac{x^2}{\sqrt{2x^2(y+z)}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\sum \frac{x}{\sqrt{y+z}} \ge \frac{1}{\sqrt{2}}.\frac{(x+y+z)^2}{x\sqrt{y+z}+y\sqrt{z+x}+z\sqrt{x+y}}$$

$$\ge \frac{1}{\sqrt{2}}.\frac{(x+y+z)^2}{\sqrt{(x+y+z)\left[x(y+z)+y(z+x)+z(x+y)\right]}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{\frac{(x+y+z)^3}{xy+yz+zx}}$$

$$\ge \frac{1}{2}\sqrt{\frac{(x+y+z).3(xy+yz+zx)}{xy+yz+zx}} = \frac{1}{2}\sqrt{3(x+y+z)} \ge \frac{1}{2}\left(\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z}\right) = \frac{1}{2}.$$

Cộng vế theo vế hai bất đẳng thức trên ta được điều phải chứng minh.

Dấu “=” xảy ra $\Leftrightarrow x = y = z = \dfrac{1}{9}$. ❒

Câu 7

Sau mỗi bước, tổng thứ tự của hàng và cột chứa quân cờ hoặc giảm đi 2 hoặc tăng lên 1.

Do đó, khi xét theo modulo 3 thì tổng này tăng 1 mỗi bước.

Vì có $n^2 - 1$ bước, nếu kết thúc ở ô kề bên phải ô xuất phát thì tổng này tăng 1 đơn vị.

Vậy $n^2 - 2$ chia hết cho 3, mâu thuẫn.

Tóm lại, câu trả lời là không thể. ❒

BỘ ĐỀ LUYỆN THI VÀO LỚP 10 CHUYÊN TOÁN

HƯỚNG DẪN GIẢI ĐỀ SỐ 21

Câu 1

a) Với mọi n nguyên dương ta có

$$\left(\sqrt{2n^2+2n+1}+\sqrt{2n^2-2n+1}\right)^2$$

$$=2n^2+2n+1+2\sqrt{(2n^2+2n+1)(2n^2-2n+1)}+2n^2-2n+1$$

$$=4n^2+2+2\sqrt{(2n^2+1)^2-(2n)^2}$$

$$=4n^2+2+2\sqrt{4n^4+1}.$$

Khi đó

$$P=\left(\sqrt{2n^2+2n+1}+\sqrt{2n^2-2n+1}\right)\sqrt{4n^2+2-2\sqrt{4n^4+1}}$$

$$=\sqrt{4n^2+2+2\sqrt{4n^4+1}}.\sqrt{4n^2+2-2\sqrt{4n^4+1}}$$

$$=\sqrt{(4n^2+2)^2-4(4n^4+1)}$$

$$=\sqrt{16n^2}=4n. \text{ ❒}$$

Vậy P nhận giá trị nguyên dương với mọi giá trị nguyên dương của n.

b) Do x là số tự nhiên và $x \not\vdots 3$ nên $x^2 \equiv 1 (\bmod 3)$. Suy ra $2^x.x^2 \equiv (-1)^x (\bmod 3)$.

Mặt khác, $9y^2 + 6y + 16 \equiv 1 (\bmod 3)$ nên $(-1)^x \equiv 1 (\bmod 3)$. Do đó x chẵn, tức là $x = 2k$ (với $k \in \mathbb{N}$). Ta có

$$(2^k.2k)^2 = (3y+1)^2 + 15 \Leftrightarrow (2^k.2k - 3y - 1)(2^k.2k + 3y + 1) = 15.$$

Xét các trường hợp sau:

- **Trường hợp 1:** $\begin{cases} 2^k.2k - 3y - 1 = 1 \\ 2^k.2k + 3y + 1 = 15 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2^k.k = 4 \\ y = 2 \end{cases}$ (không có k thỏa mãn).
- **Trường hợp 2:** $\begin{cases} 2^k.2k - 3y - 1 = 3 \\ 2^k.2k + 3y + 1 = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2^k.k = 2 \\ 6y + 2 = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k = 1 \\ y = 0 \end{cases}$.

Vậy $(x; y)$ cần tìm là $(2; 0)$. ❒

Câu 2

a) Điều kiện: $\begin{cases} x + 2 \geq 0 \\ 2 - x \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow -2 \leq x \leq 2$.

Bình phương hai vế của phương trình đã cho ta được:

$$4\left(2x + 4 + 8 - 4x + 4\sqrt{2\left(4 - x^2\right)}\right) = 9x^2 + 16 \Leftrightarrow 4\left(8 - 2x^2\right) + 16\sqrt{8 - 2x^2} - x^2 - 8x = 0$$

Đặt $t = 2\sqrt{8 - 2x^2}, t \geq 0$.

Phương trình đã cho trở thành: $t^2 + 8t - x^2 - 8x = 0$ (*)

Ta có: $\Delta' = (4 + x)^2 \geq 0$ nên phương trình (*) có hai nghiệm $t = x; t = -x - 8$.

- Với $t = x$ thì $2\sqrt{8 - 2x^2} = x \Leftrightarrow \begin{cases} 0 \leq x \leq 2 \\ 32 - 8x^2 = x^2 \end{cases} \Leftrightarrow x = \dfrac{4\sqrt{2}}{3}$.
- Với $t = -x - 8$ thì $2\sqrt{8 - 2x^2} = -x - 8$. Phương trình này vô nghiệm do $-2 \leq x \leq 2$.

Vậy phương trình đã cho có nghiệm là $x = \dfrac{4\sqrt{2}}{3}$. ❒

b) Ta có: $(xy)^{2019}\left(x^4 + y^4\right) = x^{2019}y^{2023} + x^{2023}y^{2019} = \dfrac{2}{3^{2021}} > 0 \Rightarrow xy > 0$.

Từ phương trình thứ nhất của hệ phương trình ta có:

$1 - xy = \sqrt{2\left(x^4 + y^4\right)} \geq 2|xy| = 2xy$ (Bất đẳng thức AM - GM)

$\Rightarrow xy \le \dfrac{1}{3}$ và $x^4 + y^4 = \dfrac{(1-xy)^2}{2}$.

Lại có: $x^{2019}y^{2023} + x^{2023}y^{2019} = (xy)^{2019}\left(x^4+y^4\right) = (xy)^{2019}.\dfrac{(1-xy)^2}{2}$

$$= 2(xy)^{2018}.(xy).\frac{1-xy}{2}.\frac{1-xy}{2} \le 2(xy)^{2018}.\frac{1}{3^3} \le \frac{2}{3^{2021}}.$$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow \begin{cases} xy = \dfrac{1-xy}{2} \\ xy = \dfrac{1}{3} \\ x^4 = y^4 \end{cases} \Leftrightarrow x = y = \pm\dfrac{1}{\sqrt{3}}$.

Vậy tập hợp nghiệm của hệ phương trình đã cho là:

$$S = \left\{\left(\frac{1}{\sqrt{3}};\frac{1}{\sqrt{3}}\right),\left(-\frac{1}{\sqrt{3}};-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\right\}. \square$$

Câu 3

Phương trình hoành độ giao điểm của (P) và d

$$x^2 = -2mx - 4m \Leftrightarrow x^2 + 2mx + 4m = 0 \qquad (*)$$

d cắt (P) tại hai điểm phân biệt $\Leftrightarrow$ phương trình (*) có hai nghiệm phân biệt

$\Leftrightarrow \Delta' > 0 \Leftrightarrow m^2 - 4m > 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m < 0 \\ m > 4 \end{array}\right.$.

Theo định lí Vi-ét ta có $\begin{cases} x_1 + x_2 = -2m \\ x_1x_2 = 4m \end{cases}$.

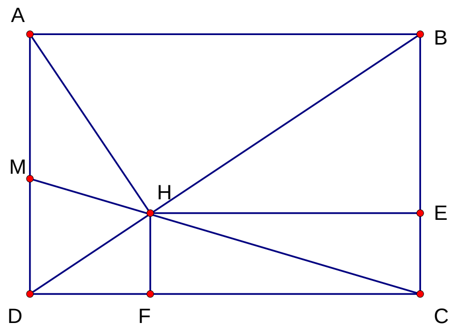
Ta có $|x_1| + |x_2| = 3 \Leftrightarrow x_1^2 + x_2^2 + 2|x_1x_2| = 9 \Leftrightarrow (x_1+x_2)^2 - 2x_1x_2 + 2|x_1x_2| = 9$

$\Leftrightarrow (-2m)^2 - 8m + |8m| = 9 \Leftrightarrow 4m^2 - 8m + |8m| - 9 = 0$.

- Nếu $m > 4$ thì $4m^2 - 9 = 0 \Leftrightarrow m = \pm\dfrac{3}{2}$ (loại).
- Nếu $m < 0$ thì $4m^2 - 16m - 9 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = -\dfrac{1}{2} \\ m = \dfrac{9}{2} \end{array}\right.$. So điều kiện chọn $m = -\dfrac{1}{2}$.

Vậy $m=-\dfrac{1}{2}$ thỏa mãn yêu cầu bài toán. ❒

Câu 4



a) Ta có

$\dfrac{HE}{CD}=\dfrac{BH}{BD}$ (do $HE // CD$)

$\Leftrightarrow \dfrac{HE}{a}=\dfrac{AB^2}{BD^2}$ (do $HB=\dfrac{AB^2}{BD}$)

Do đó $HE=\dfrac{a^3}{a^2+b^2}$.

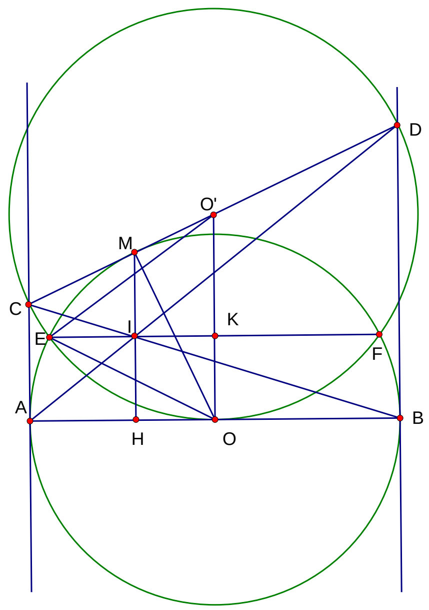
b) Hoàn toàn tương tự ta có $HF=\dfrac{b^3}{a^2+b^2}$

Ta có $CF=HF$ mà $HF // AD$, theo định lý Thales $\dfrac{CF}{CD}=\dfrac{HF}{DM}\Leftrightarrow DM=\dfrac{CD.HF}{CF}=\dfrac{b^3}{a^2}$.

Theo định lý Pythagore, ta có $CM^2=CD^2+DM^2=a^2+\dfrac{b^6}{a^4}=\dfrac{a^6+b^6}{a^4}$.

Vậy $CM=\dfrac{\sqrt{a^6+b^6}}{a^2}$. ❒

Câu 5



a) Ta có $CA=CM$; $DB=DM$.

Suy ra $CD = CA + DB$.

Gọi O' trung điểm CD ta chứng minh được OO' là đường trung bình hình thang

$ACDB$ nên $OO' = \frac{1}{2}\left(AC + BD\right) = CD$.

Suy ra đường tròn đường kính CD qua O.

Lại có $OO' \perp AB$ (do $OO' // AC$ và $AC \perp AB$).

Vậy AB là tiếp tuyến của đường tròn đường kính CD.

b) Ta có $\triangle ICA \sim \triangle IBD \Rightarrow \frac{IC}{IB} = \frac{CA}{BD} = \frac{CM}{DM} \Rightarrow MI // BD \Rightarrow MI \perp AB$.

Gọi H là giao điểm MI và $AB \Rightarrow MH // BD$.

Ta có $\frac{MI}{BD} = \frac{CI}{CB} = \frac{AI}{AD} = \frac{IH}{BD} \Rightarrow MI = IH$ hay I trung điểm MH.

Gọi I' là giao điểm của MH và EF.

Đặt $h = MH$ và gọi R bán kính đường tròn (O)

Ta có $\triangle MHO \sim \triangle OMO' \Rightarrow \frac{MH}{OM} = \frac{OM}{OO'} \Rightarrow OO' = \frac{R^2}{h}$.

Gọi $x = I'H$ và K là giao điểm OO' với EF.

Ta có

$OO' \perp EF$ (đoạn nối tâm vuông góc dây chung)

$OK = I'H = x$.

$O'E = OO' = \frac{R^2}{h}$.

Theo định lý Pythagore cho $\triangle O'KE$ ta có

$KE^2 = O'E^2 - O'K^2$ và $O'K = O'O - OK$

$$KE^2 = \left(\frac{R^2}{h}\right)^2 - \left(\frac{R^2}{h} - x\right)^2 = \frac{2R^2x}{h} - x^2 \qquad (1)$$

Trong tam giác vuông EKO ta có

$$KE^2 = OE^2 - OK^2 = R^2 - x^2 \qquad (2)$$

Từ (1) và (2) ta có $\frac{2R^2x}{h} - x^2 = R^2 - x^2 \Leftrightarrow x = \frac{h}{2}$.

Vậy $I \equiv I'$ hay 3 điểm E, I, F thẳng hàng. ❒

Câu 6

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy – Schwarz ta có

$$\left(a^2+\frac{b^2}{3}+\frac{c^2}{5}\right)(1+3+5) \ge (a+b+c)^2.$$

Suy ra

$$2\sqrt{a^2+\frac{b^2}{3}+\frac{c^2}{5}} \ge \frac{2}{3}(a+b+c).$$

Lại áp dụng bất đẳng thức Cauchy – Schwarz ta có

$$\frac{1}{a}+\frac{9}{b}+\frac{25}{c}=\frac{1^2}{a}+\frac{3^2}{b}+\frac{5^2}{c} \ge \frac{(1+3+5)^2}{a+b+c}.$$

Suy ra

$$3\sqrt{\frac{1}{a}+\frac{9}{b}+\frac{25}{c}} \ge \frac{27}{\sqrt{a+b+c}}.$$

Đặt $t=a+b+c$, khi đó ta có

$$Q \ge \frac{2}{3}t+\frac{27}{\sqrt{t}}=\frac{t}{6}+\frac{t}{2}+\frac{27}{2\sqrt{t}}+\frac{27}{2\sqrt{t}} \ge \frac{9}{6}+3\sqrt[3]{\frac{t}{2}.\frac{27}{2\sqrt{t}}.\frac{27}{2\sqrt{t}}}=15.$$

Vậy $\min Q=15 \Leftrightarrow a=1, b=3, c=5$.

Câu 7

Xét 17 số: 3; 9; 15; 21;…;87; 93; 99. Hai số bất kì trong dãy trên đều có tổng chia hết cho 6.

Giả sử ta có thể tìm $n=18$ số $a_1; a_2; ...; a_n$ thỏa mãn điều kiện đề bài.

Ta có $a_2 \equiv -a_1 \pmod 6$; $a_3 \equiv -a_1 \pmod 6$;…; $a_n \equiv -a_1 \pmod 6$.

Suy ra $a_2 \equiv a_3 \equiv ... \equiv a_n \pmod 6$.

Tương tự $a_1 \equiv a_3 \equiv ... = a_n \pmod 6$.

Do đó $a_1 \equiv a_2 \equiv a_3 \equiv ... = a_n \pmod 6$.

Mà

$a_2 \equiv -a_1 \pmod 6 \Rightarrow a_1 \equiv -a_1 \pmod 6 \Rightarrow 2a_1 \vdots 6$. Điều này dẫn đến

$$a_1 \equiv a_2 \equiv ... \equiv a_n \equiv 0 \pmod 6 \text{ hoặc } a_1 \equiv a_2 \equiv ... \equiv a_n \equiv 3 \pmod 6.$$

Giả sử $n \geq 18$ số thỏa mãn đề toán thì sẽ có 18 số chia hết cho 6 trong khoảng $[1;100]$ hoặc 18 số chia cho 6 dư 3 trong khoảng $[1;100]$, vô lí vì lấy tất cả các số chia hết cho 6 trong khoảng $[1;100]$ là 16 số, còn lấy tất cả các số chia 6 dư 3 trong khoảng $[1;100]$ là 17 số. Mà $n = 17$ thỏa mãn. Vậy $n = 17$ là số lớn nhất thỏa mãn đề toán. ❐

===Hết===

BỘ ĐỀ LUYỆN THI VÀO LỚP 10 CHUYÊN TOÁN

HƯỚNG DẪN GIẢI ĐỀ SỐ 22

Câu 1

a) Để ý rằng $a^2 = b^3 = 2$ và $a + 1 = \dfrac{1}{a-1}$.

Ta có

$$a + b + \frac{a}{b} + \frac{b}{a} + 1 + \frac{1}{b} = \frac{a^2b + ab^2 + a^2 + b^2 + ab + a}{ab} = \frac{(a+1)(b^2 + ab + a)}{ab}$$

$$= \frac{(a+1)(ab^2 + a^2b + a^2)}{a^2b} = \frac{(a+1)(ab^2 + b^4 + b^3)}{b^4} = \frac{(a+1)(a + b^2 + b)}{b^2}$$

$$= \frac{a + b^2 + b}{b^2(a-1)} = \frac{b^3 + b^2 + ab}{b^3(a-1)} = \frac{a^2 + b^2 + ab}{ab^3 - b^3} = \frac{a^2 + b^2 + ab}{a^3 - b^3} = \frac{1}{a-b}.$$

Vậy $\dfrac{1}{a-b} - \dfrac{1}{b} = a + b + \dfrac{a}{b} + \dfrac{b}{a} + 1$. ❐

b) Đặt $N = ab + bc + ca - 1$. Để ý rằng N chia hết cho a, b, c. Do a, b, c đôi một nguyên tố cùng nhau nên $N \vdots abc$, tức là $ab + bc + ca - 1 = kabc$ (với $k \in \mathbb{N}^*$). Vì $a < b < c$ nên $kabc < 3bc \Rightarrow ka < 3 \Rightarrow ka \leq 2$. Mà a nguyên tố nên $a = 2$ và $k = 1$.

Khi đó $2b + bc + 2c - 1 = bc \Leftrightarrow (b-2)(c-2) = 3$. Do $b < c \Leftrightarrow b - 2 < c - 2$ nên

$$\begin{cases} b - 2 = 1 \\ c - 2 = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = 3 \\ c = 5 \end{cases}.$$

Vậy $(a;b;c) = (2;3;5)$ thỏa mãn yêu cầu bài toán. ❐

Câu 2

a) Đặt $a=\sqrt{5x^2+6x+5}$ và $b=4x$ ($a>0$).

Phương trình đã cho thành

$$a=\frac{b^3+b}{a^2+1}\Leftrightarrow a^3+a=b^3+b\Leftrightarrow (a^3-b^3)+(a-b)=0\Leftrightarrow (a-b)(a^2+ab+b^2+1)=0$$ Do

$$a^2+ab+b^2+1=\left(a+\frac{b}{2}\right)^2+\frac{3b^2}{4}+1>0,\forall a,b$$ nên $a-b=0\Leftrightarrow a=b$.

Khi đó $\sqrt{5x^2+6x+5}=4x\Leftrightarrow\begin{cases}x\geq 0\\5x^2+6x+5=16x^2\end{cases}$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}x\geq 0\\11x^2-6x-5=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\geq 0\\\left[\begin{array}{l}x=1\\x=-\dfrac{5}{11}\end{array}\right.\end{cases}\Leftrightarrow x=1.$$

Vậy $x=1$ là nghiệm duy nhất của phương trình đã cho. ❒

b) Hệ phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{cases}(x-2)^2=-2y+4\\(2x-y^2)^2-2y+4=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}(x-2)^2=-2y+4\\(2x-y^2)^2+(x-2)^2=0\end{cases}.$$

Do $(2x-y^2)^2\geq 0$ và $(x-2)^2\geq 0$ nên $(2x-y^2)^2+(x-2)^2\geq 0$.

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $\begin{cases}2x-y^2=0\\x-2=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=2\\y=\pm 2\end{cases}$. Thay vào phương trình còn lại trong hệ, chỉ thấy $(x;y)=(2;2)$ thỏa mãn.

Vậy hệ phương trình đã cho có nghiệm duy nhất $(2;2)$. ❒

Câu 3

Phương trình hoành độ giao điểm của (P) và d là $x^2=m\Leftrightarrow x=\pm\sqrt{m}$.

Do đó $A\left(-\sqrt{m};m\right),B\left(\sqrt{m};m\right)$.

Phương trình hoành độ giao điểm của (P) và d' là $x^2=m^2\Leftrightarrow x=\pm m$.

Do đó $C\left(m;m^2\right),D\left(-m;m^2\right)$.

Ta có $S_{OCD}=m^3$ và $S_{ABCD}=(m-m^2)\left(\sqrt{m}+m\right)$.

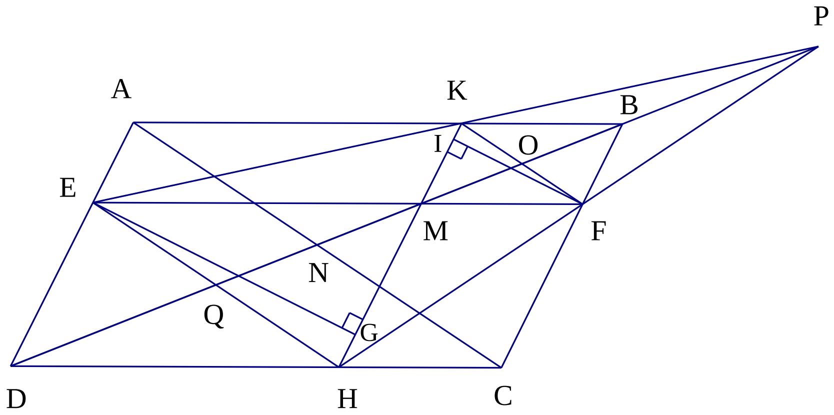
Theo đề $S_{ABCD}=9S_{OCD}\Leftrightarrow (m-m^2)\left(\sqrt{m}+m\right)=9m^3\Leftrightarrow 10m\sqrt{m}+m-\sqrt{m}-1=0$.

Đặt $t=\sqrt{m}$ (với $0<t<1$). Khi đó $10t^3+t^2-t-1=0 \Leftrightarrow (2t-1)(5t^2+3t+1)=0$.

Do $0<t<1$ nên $5t^2+3t+1>0$. Do đó $t=\dfrac{1}{2}$ hay $\sqrt{m}=\dfrac{1}{2} \Leftrightarrow m=\dfrac{1}{4}$.

Vậy $m=\dfrac{1}{4}$ thỏa mãn yêu cầu bài toán. ❒

Câu 4



a) Dễ thấy $\dfrac{BK}{AK}=\dfrac{MF}{ME}$.

Theo hệ quả của định lí Thales ta có $\dfrac{MF}{ME}=\dfrac{BF}{DE}=\dfrac{BF}{FC}$.

Suy ra $\dfrac{BK}{AK}=\dfrac{BF}{FC}$ hay $KF // AC$.

Tương tự, $EH // AC$.

Do đó $KF // EH$.

Gọi $O=BD\cap KF, Q=BD\cap HE, N=AC\cap BD$.

Ta chứng minh được $\dfrac{OK}{OF}=\dfrac{QE}{QH}=1$.

Gọi $P=EK\cap HF, P'=EK\cap DB$.

Chứng minh được $P\equiv P'$ ta đi đến kết luận EK, HF, BD đồng quy.

b) Kẻ EG và FI vuông góc với HK; I và G thuộc HK.

Ta có $S_{MKAE}=MK.EG$ và $S_{MHCF}=MH.FI$.

Chứng minh được $\dfrac{MK}{MH}=\dfrac{KB}{HD}$.

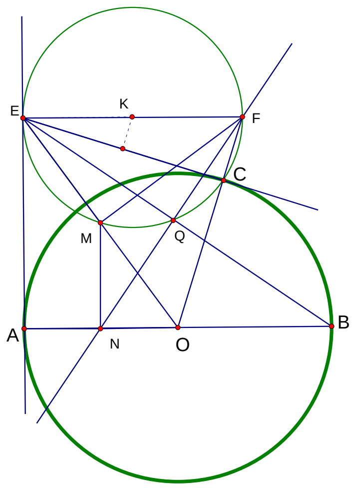
Suy ra $\dfrac{MK}{MH}=\dfrac{MF}{ME}$.

Chứng minh được $\dfrac{MF}{ME}=\dfrac{FI}{EG}$.

Suy ra $\dfrac{MK}{MH}=\dfrac{FI}{EG}$ hay $MK.EG=MH.FI$.

Vậy $S_{MKAE}=S_{MHCF}$. ❒

Câu 5



a) Ta có EC là tiếp tuyến của đường tròn $(O)\Rightarrow \widehat{ECO}=90^0$, mà $C\in\left(K,\dfrac{EF}{2}\right)$

$\Rightarrow \widehat{ECF}=90^0$ hay O,C,F thẳng hàng.

Mà EC,EA là hai tiếp tuyến của $(O)\Rightarrow \widehat{AOE}=\widehat{EOF}$

Mặt khác $FE\perp d, AB\perp d\Rightarrow EF//AB\Rightarrow \widehat{AOE}=\widehat{OEF}$

$\Rightarrow \widehat{EOF}=\widehat{OEF}\Rightarrow \triangle EFO$ cân tại F.

Mà M là trung điểm của $EO\Rightarrow FM\perp EO$.

$\Rightarrow \widehat{FME}=90^0\Rightarrow M\in(K)$.

b) Gọi N là trung điểm của AO, Q là giao điểm của BE và FN

$\Rightarrow MN$ là đường trung bình của tam giác $EAO\Rightarrow MN//AE$

$MN\perp AO\Rightarrow \widehat{NMO}=90^0-\widehat{MON}\Rightarrow \widehat{NMF}=180^0-\widehat{MON}=\widehat{EOB}$.

Mặt khác, do tam giác MOF đồng dạng với tam giác NOM (g – g) nên

$$\frac{MF}{NM}=\frac{MO}{NO}=\frac{EO}{AO} \text{ mà } AO=BO \Rightarrow \frac{MF}{NM}=\frac{EO}{BO}$$

$\Rightarrow$ tam giác MFN đồng dạng với tam giác OEB (c – g – c)

$\Rightarrow \widehat{OEB}=\widehat{MFN}$ hay $\widehat{MEQ}=\widehat{MFQ}$ => tứ giác $MEFQ$ nội tiếp đường tròn (K)

$\Rightarrow \widehat{EQF}=90^0 \Rightarrow NF \perp BE$

Vậy khi E thay đổi trên d thì đường thẳng đi qua F và vuông góc với BE luôn đi qua điểm cố định là trung điểm của OA. ❐

Câu 6

Đặt $2x+y=a, x+2y=b$. Khi đó $a,b>0$ và biểu thức P trở thành

$$P=\frac{2}{\sqrt{a^3+1}-1}+\frac{2}{\sqrt{b^3+1}-1}+\frac{ab}{4}-\frac{8}{a+b}.$$

Áp dụng bất đẳng thức AM – GM ta có

$$P=\frac{2}{\sqrt{(a+1)(a^2-a+1)}-1}+\frac{2}{\sqrt{(b+1)(b^2-b+1)}-1}+\frac{ab}{4}-\frac{8}{a+b}$$

$$\geq \frac{2}{\frac{a+1+a^2-a+1}{2}-1}+\frac{2}{\frac{b+1+b^2-b+1}{2}}+\frac{ab}{4}-\frac{4}{\sqrt{ab}}$$

$$=\frac{4}{a^2}+\frac{4}{b^2}+\frac{ab}{4}-\frac{4}{\sqrt{ab}}$$

$$\geq \frac{8}{ab}+\frac{ab}{4}-\frac{4}{\sqrt{ab}}.$$

Đặt $t=\sqrt{ab}>0$. Khi đó $P\geq \frac{8}{t^2}+\frac{t^2}{4}-\frac{4}{t}\geq 1 \Leftrightarrow (t-2)^2(t^2+4t+8)\geq 0$.

Vậy $\min P=1 \Leftrightarrow x=y=\frac{2}{3}$. ❐

Câu 7

Muốn xuất hiện số 2016 thì trên bảng phải có hai số a,b thỏa mãn $a+b+ab=2016$ với $a,b\in \mathbb{N}^*$.

Ta có $a+b+ab=2016 \Leftrightarrow (a+1)(b+1)=2017$.

Do 2017 là số nguyên tố nên $\left[\begin{array}{l} a+1=1 \\ b+1=1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a=0 \\ b=0 \end{array}\right.$ (vô lí vì $a,b \in \mathbb{N}^*$).

Vậy không thể xuất hiện số 2016 trên bảng. ❒

===Hết===

BỘ ĐỀ LUYỆN THI VÀO LỚP 10 CHUYÊN TOÁN

HƯỚNG DẪN GIẢI ĐỀ SỐ 23

Câu 1

a) Ta có

$$2\sqrt{a}-\sqrt{b}-\frac{2\sqrt{b}\left(2\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}=\frac{\left(2\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}.$$

$$\frac{3}{2\sqrt{a}-\sqrt{b}}+\frac{6\sqrt{b}+4}{a-\sqrt{ab}+\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)}=\frac{3}{2\sqrt{a}-\sqrt{b}}+\frac{6\sqrt{b}+4}{\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)\left(2\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)}$$

$$=\frac{3\sqrt{a}+3\sqrt{b}+4}{\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)\left(2\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)}.$$

Do đó $P=\dfrac{3\sqrt{a}+3\sqrt{b}+4}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}=3+\dfrac{4}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}$.

P đạt giá trị lớn nhất $\Leftrightarrow \sqrt{a}+\sqrt{b}$ đạt giá trị nhỏ nhất

$$\Leftrightarrow a=1,b=2 \text{ hoặc } a=2,b=1.$$

Vậy $n=12$ hoặc $n=21$ thì $\max P=3+\dfrac{4}{1+\sqrt{2}}=4\sqrt{2}-1$. ❒

b) Do $2n+1$ và $3n+1$ là các số nguyên tố nên

$$\begin{cases} 2n+1=a^2 \\ 3n+1=b^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} n=b^2-a^2 \\ 3a^2-2b^2=1 \end{cases}.$$

Khi đó

$$2n+9=2(b^2-a^2)+9(3a^2-2b^2)\Leftrightarrow 2n+9=(5a-4b)(5a+4b).$$

Do $2b+9$ là số nguyên tố và $5a+4b\geq 5a-4b$ nên

$$\begin{cases}5a+4b=2n+9\\5a-4b=1\end{cases}\Rightarrow b=\frac{5a-1}{4}.$$

Thay $b=\dfrac{5a-1}{4}$ vào đẳng thức $3a^2-2b^2=1$ ta được

$$3a^2-2\left(\frac{5a-1}{4}\right)^2=1\Leftrightarrow a^2-10a+9=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}a=1\\a=9\end{array}\right..$$

- Với $a=1$, suy ra $b=1$. Do đó $n=0$ (loại vì $2n+9=9$ không phải là số nguyên tố).
- Với $a=9$, suy ra $b=11$. Do đó $n=40$ (thỏa $2n+9=89$ là số nguyên tố).

Vậy $n=40$ thỏa mãn yêu cầu bài toán. ❒

Câu 2

a) Điều kiện: $\dfrac{5}{3}\leq x\leq\dfrac{7}{3}$.

Do $9x^2-36x+38=9(x-2)^2+2>0$ nên phương trình đã cho tương đương với

$$3x-5+7-3x+2\sqrt{-9x^2+36x-35}=(9x^2-36x+38)^2$$

$$\Leftrightarrow 2+2\sqrt{-9x^2+36x-35}=(9x^2-36x+38)^2\qquad(*)$$

Đặt $t=\sqrt{-9x^2+36x-35}=\sqrt{1-9(x-2)^2}\leq 1$. Suy ra $0<t\leq 1$.

Phương trình (*) trở thành

$$2+2t=(-t^2+3)^2\Leftrightarrow t^4-6t^2-2t+7=0$$

$$\Leftrightarrow (t^4-t^3)+(t^3-t^2)-(5t^2-5t)-(7t-7)=0$$

$$\Leftrightarrow (t-1)(t^3+t^2-5t-7)=0.$$

Do $0<t\leq 1$ nên $t^3+t^2-5t-7\leq 1^3+1^2-5.0-7<0$ nên $t-1=0\Leftrightarrow t=1$.

Với $t=1$ ta có $\sqrt{-9x^2+36x-35}=1\Leftrightarrow 9(x-2)^2=0\Leftrightarrow x=2$.

Vậy phương trình đã cho có nghiệm duy nhất $x=2$. ❒

b) Đặt $P=\left(x^2+\dfrac{1}{4y^2}\right)\left(y^2+\dfrac{1}{4x^2}\right)=x^2y^2+\dfrac{1}{16x^2y^2}+\dfrac{1}{2}$.

Áp dụng bất đẳng thức AM – GM ta có

$$x^2y^2+\frac{1}{256x^2y^2}\ge 2\sqrt{x^2y^2.\frac{1}{256x^2y^2}}=\frac{1}{8}.$$

Lại có $1=x+y\ge 2\sqrt{xy}\Rightarrow xy\le\frac{1}{4}$.

Từ đó suy ra $P=x^2y^2+\frac{1}{256x^2y^2}+\frac{15}{256x^2y^2}+\frac{1}{2}\ge\frac{1}{8}+\frac{15}{256.\left(\frac{1}{4}\right)^2}=\frac{25}{16}$.

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow\begin{cases}x^2y^2=\dfrac{1}{256x^2y^2}\\ x=y\\ x+y=1\end{cases}\Leftrightarrow x=y=\frac{1}{2}$.

Vậy hệ phương trình đã cho có nghiệm duy nhất $\left(\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right)$. ❐

Câu 3

Đường thẳng d qua $I(0;1)$ với hệ số góc k nên có dạng $y=kx+1$.

Phương trình hoành độ giao điểm d và (P) là

$$\frac{1}{4}x^2=kx+1\Leftrightarrow x^2-4kx-4=0\quad (*)$$

Do $ac=-4<0$ nên d cắt (P) tại 2 điểm phân biệt A,B. Gọi x_1,x_2 là hai nghiệm của phương trình (*) và giả sử $x_1<0<x_2$. Khi đó $A(x_1;kx_1+1),B(x_2;kx_2+1)$.

Theo định lí Vi-et ta có $x_1+x_2=4k$; $x_1x_2=-4$.

$$\frac{1}{IA}+\frac{1}{IB}=\frac{1}{\sqrt{x_1^2+k^2x_1^2}}+\frac{1}{\sqrt{x_2^2+k^2x_2^2}}$$

$$=\frac{1}{-x_1\sqrt{1+k^2}}+\frac{1}{x_2\sqrt{1+k^2}}$$

$$=\frac{x_2}{4\sqrt{1+k^2}}-\frac{x_1}{4\sqrt{1+k^2}}$$

$$=\frac{\sqrt{(x_1+x_2)^2-4x_1x_2}}{4\sqrt{1+k^2}}$$

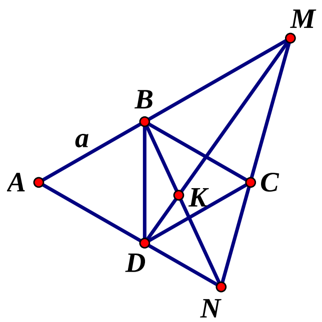
$$=\frac{\sqrt{16k^2+16}}{4\sqrt{1+k^2}}=1.$$

Do đó $\frac{1}{IA_1}+\frac{1}{IB_1}=\frac{1}{IA_2}+\frac{1}{IB_2}=1$.

Áp dụng bất đẳng thức AM – GM ta có

$$2=\frac{1}{IA_1}+\frac{1}{IB_1}+\frac{1}{IA_2}+\frac{1}{IB_2}=\frac{IA_1+IA_2}{IA_1.IA_2}+\frac{IB_1+IB_2}{IB_1.IB_2}\geq\frac{2\sqrt{IA_1.IA_2}}{IA_1.IA_2}+\frac{2\sqrt{IB_1.IB_2}}{IB_1.IB_2}.$$

Suy ra $\frac{1}{\sqrt{IA_1.IA_2}}+\frac{1}{\sqrt{IB_1.IB_2}}\leq 1$. ❐



Câu 4

a) Do $BC // AD$ và $AB // DC$ (tính chất hình thoi) nên $\widehat{MBC}=\widehat{A}=\widehat{CDN}$ (các cặp góc đồng vị)

$\widehat{BCM}=\widehat{DNC}$ (cặp góc đồng vị).

Suy ra $\triangle MBC\sim\triangle CDN$ (g – g) $\Rightarrow\frac{BM}{DC}=\frac{BC}{DN}$

$\Rightarrow BM.DN=BC.DC=a^2$ (không đổi).

b) $\triangle BCD$ đều (do $BC=CD$ và $\widehat{C}=60^0$)

$\Rightarrow BD=DC=BC$.

Theo chứng minh câu a) $\frac{BM}{DC}=\frac{BC}{DN}$ suy ra $\frac{BM}{BD}=\frac{DB}{DN}$.

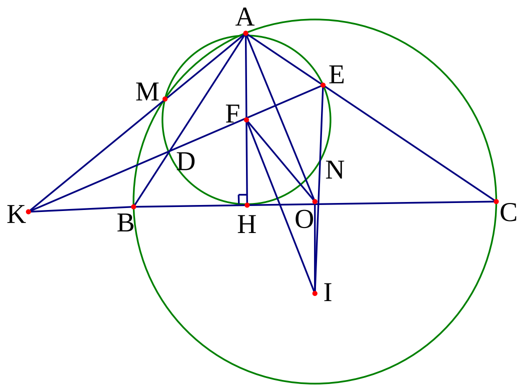
Lại có $\widehat{MBD}=\widehat{BDN}=120^0$ (kề bù với các góc của $\triangle ABD$ đều).

Suy ra $\triangle BMD\sim\triangle DBN$ (c – g – c) $\Rightarrow\widehat{AMD}=\widehat{DBN}$.

Do $\triangle BKD$ và $\triangle MBD$ có $\widehat{AMD}=\widehat{DBN}$; $\widehat{BDM}$ chung nên $\triangle BKD\sim\triangle MBD$ (g – g)

$\Rightarrow\widehat{BKD}=\widehat{MBD}=120^0$. ❐

Câu 5



a) Xét $\triangle ABC$ và $\triangle HAC$ có $\widehat{BAC} = \widehat{AHC} = 90^0$; $\widehat{C}$ chung

$\Rightarrow \Delta ABC \sim \Delta HAC \Rightarrow \dfrac{AB}{AH} = \dfrac{AC}{HC} \Rightarrow \dfrac{AB}{AC} = \dfrac{AH}{HC} = \dfrac{3}{4}$.

Mà $AB^2 + AC^2 = BC^2$ nên $\dfrac{AB^2}{9} = \dfrac{AC^2}{16} = \dfrac{AB^2 + AC^2}{25} = \dfrac{20^2}{25} = 16$

$\Rightarrow AB^2 = 16.9; AC^2 = 16.16$.

Vậy $AB = 12cm$ và $AC = 16cm$.

b) Gọi F là tâm của đường tròn đường kính AH. Ta có $\widehat{DAE} = 90^0$. Do đó DE là đường kính của đường tròn (F). Suy ra D, E, F thẳng hàng.

Mặt khác (O) và (F) cắt nhau tại A và N nên OF là trung trực của AM $\Rightarrow OF \perp AM$ (1).

Gọi N là giao điểm của OA và DE. Ta có $OA = OC = R$. Do đó $\triangle OAC$ là tam giác cân tại O. Suy ra $\widehat{OAC} = \widehat{OCA}$; $FA = EF = r \Rightarrow \triangle FAE$ cân tại $F \Rightarrow \widehat{FEA} = \widehat{FAE}$.

Mà $\widehat{OCA} + \widehat{FAE} = 90^0$ nên $\widehat{OAC} + \widehat{FEA} = 90^0 \Rightarrow \widehat{ANE} = 90^0 \Rightarrow KN \perp OA$.

Ta có F là trực tâm của tam giác KAO nên $OF \perp KA$ (2).

Từ (1) và (2) suy ra A, M, K thẳng hàng.

Gọi I là giao điểm của hai trung trực của DE và BC.

Ta có: $\begin{cases} AF \perp BC \\ OI \perp BC \end{cases} \Rightarrow AF // OI$; $\begin{cases} IF \perp OA \\ OA \perp DE \end{cases} \Rightarrow IF // OA$.

Do đó $FAOI$ là hình bình hành. Suy ra $IF = OA; FA = OI \Rightarrow IF = OC; FE = OI$. Mà $\widehat{IFE} = \widehat{IOC}$ nên $\triangle IFE = \triangle COI$. Suy ra $IE = IC$. Mà $IE = ID; IB = IC$ nên $IB = ID = IE = IC$.

Vậy B, D, E, C cùng nằm trên đường tròn (I). ❒

Câu 6

Bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với

$$2\left(a^3+b^3+c^3\right)\ge\sqrt{2a^3}.\sqrt{bc(b+c)}+\sqrt{2b^3}.\sqrt{ca(c+a)}+\sqrt{2c^3}.\sqrt{ab(a+b)} \qquad (1)$$

Áp dụng bất đẳng thức AM – GM ta có

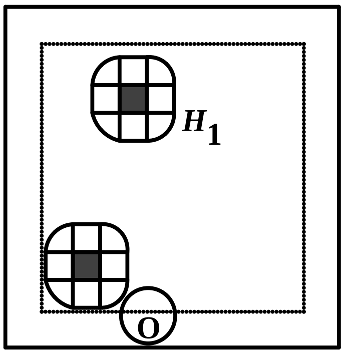
$$VP(1)\le\frac{1}{2}\left(2a^3+b^2c+bc^2\right)+\frac{1}{2}\left(2b^3+c^2a+ca^2\right)+\frac{1}{2}\left(2c^3+a^2b+ab^2\right).$$

Lại có $b^3+c^3-b^2c-bc^2=(b+c)(b-c)^2\ge 0\Rightarrow b^2c+bc^2\le b^3+c^3$.

Tương tự, $c^2a+ca^2\le c^3+a^3; a^2b+ab^2\le a^3+b^3$.

Suy ra $b^2c+bc^2+c^2a+ca^2+a^2b+ab^2\le 2\left(a^3+b^3+c^3\right)$. ❒

Câu 7



Với mỗi tấm bìa hình vuông có cạnh bằng 1, ta vẽ thêm 4 hình vuông nhỏ cũng có cạnh 1 và 4 hình quạt tròn bán kính 1 ở phía ngoài tấm bìa thu được hình $H_k\left(1\le k\le 2018\right)$ (hình vẽ bên).

Tổng diện tích của 2018 hình H_k là $S_1=2018.(5+\pi)$.

Ta thu nhỏ hình vuông lớn, mỗi phía co lại 1 đơn vị được hình vuông A (cạnh bằng 129).

Diện tích của hình vuông A là $S_2=129^2=16641>S_1$. Suy ra 2018 hình H_k không thể phủ hết được hình vuông A.

Như vậy ta luôn tìm được một điểm O nằm trong hình vuông A nhưng O không nằm trong bất cứ hình H_k nào. Khi đó hình tròn $(O;1)$ thỏa mãn bài toán. ❒

BỘ ĐỀ LUYỆN THI VÀO LỚP 10 CHUYÊN TOÁN

HƯỚNG DẪN GIẢI ĐỀ SỐ 24

Câu 1

a) Đặt $a=\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}$ và $b=\sqrt{6-3\sqrt{2+\sqrt{3}}}$.

Ta có $a^2+b^2=8-2\sqrt{2+\sqrt{3}}$ và $ab=\sqrt{6-3\sqrt{3}}$.

Từ $x_0=a-b$ suy ra $x_0^2=a^2+b^2-2ab=8-2\sqrt{2+\sqrt{3}}-2\sqrt{6-3\sqrt{3}}$.

Khi đó

$$2\sqrt{2+\sqrt{3}}+2\sqrt{6-3\sqrt{3}}=8-x_0^2$$

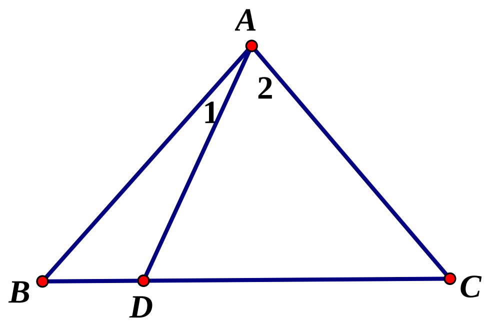
$$\Leftrightarrow\begin{cases}x_0^2\le 8\\ \left(2\sqrt{2+\sqrt{3}}\right)^2+\left(2\sqrt{6-3\sqrt{3}}\right)^2+8\sqrt{3}=(8-x_0^2)^2\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}x_0^2\le 8\\ 2(2+\sqrt{3})+4(6-3\sqrt{3})+8\sqrt{3}=64-16x_0^2+x_0^4\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}x_0^2\le 8\\ x_0^4-16x_0^2+32=0\end{cases}.$$

Vậy x_0 là nghiệm của phương trình $x^4-16x^2+32=0$. ❒

b)



$\triangle ABC$ có $\widehat{A}>\widehat{B}\Rightarrow BC>AC$.

Trên cạnh CB lấy điểm D sao cho $CA=CD$.

Ta có $\widehat{A}=\widehat{A_1}+\widehat{A_2}=\widehat{A_1}+\widehat{ADC}=\widehat{A_1}+\widehat{A_1}+\widehat{B}=\widehat{B}+2\widehat{A_1}$.

Mà $\widehat{A}=\widehat{B}+2\widehat{C}$ nên $\widehat{C}=\widehat{A_1}$.

Gọi $a,b,c\in\mathbb{N}$ lần lượt là độ dài ba cạnh BC,CA,AB của $\triangle ABC$.

Xét $\triangle ABC$ và $\triangle DBA$ có:

$\widehat{C}=\widehat{A_1}$ (chứng minh trên)

$\widehat{B}$ chung.

Do đó $\triangle ABC \sim \triangle DBA$ (g – g) $\Rightarrow \dfrac{AB}{DB} = \dfrac{BC}{BA} \Rightarrow \dfrac{c}{a-b} = \dfrac{a}{c} \Rightarrow c^2 = a(a-b)$ (*)

Do độ dài các cạnh của $\triangle ABC$ là các số tự nhiên liên tiếp và $a > b$ nên $a - b = 1$ hoặc $a - b = 2$.

- Nếu $a - b = 1$ thì $a - c = 2$ hay $a = c + 2$. Thay vào (*) ta được $c^2 = c + 2 \Leftrightarrow c(c-1) = 2 \Leftrightarrow c = 2$. Suy ra $a = 4, b = 3$.

Ba số 2; 3; 4 thỏa mãn bất đẳng thức tam giác.

- Nếu $a - b = 2$ thì $a - c = 1$ hay $a = c + 1$. Thay vào (*) ta được $c^2 = (c+1).2 \Leftrightarrow c^2 - 2c - 2 = 0 \Leftrightarrow (c-1)^2 = 3$ (vô lý vì 3 không phải là số chính phương).

Vậy $AB = 2, AC = 3, BC = 4$. ❒

Câu 2

a) Điều kiện: $x \ge 0$.

Phương trình đã cho tương đương với

$$\left(\frac{4\sqrt{x}}{4x - 8\sqrt{x} + 7} - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{3\sqrt{x}}{4x - 10\sqrt{x} + 7} - \frac{1}{2}\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{-4x + 16\sqrt{x} - 7}{2(4x - 8\sqrt{x} + 7)} + \frac{-4x + 16\sqrt{x} - 7}{2(4x - 10\sqrt{x} + 7)} = 0$$

$$\Leftrightarrow (-4x + 16\sqrt{x} - 7)\left(\frac{1}{4x - 8\sqrt{x} + 7} + \frac{1}{4x - 10\sqrt{x} + 7}\right) = 0 \quad (*)$$

Do $4x - 8\sqrt{x} + 7 = 4\left(\sqrt{x} - 1\right)^2 + 3 > 0$; $4x - 10\sqrt{x} + 7 = 4\left(\sqrt{x} - \dfrac{5}{4}\right)^2 + \dfrac{3}{4} > 0$ nên

$$(*) \Leftrightarrow -4x + 16\sqrt{x} + 7 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sqrt{x} = \dfrac{7}{2} \\ \sqrt{x} = \dfrac{1}{2} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{49}{4} \\ x = \dfrac{1}{4} \end{array}\right. .$$ ❒

b) Điều kiện: $\begin{cases} xy \ge 0 \\ x^2 + y^2 > 0 \end{cases}$.

Nếu $x \le 0; y \le 0$ thì $x + \dfrac{6\left(x^3 + y^3\right)}{x^2 + xy + y^2} - \sqrt{2\left(x^2 + y^2\right)} < 0 < 3$. Điều này dẫn đến hệ vô nghiệm. Vì thế, ta chỉ giải hệ phương trình khi $x > 0; y > 0$.

Khi đó trong trình thứ nhất của hệ tương đương với:

$$\frac{x}{2}+3\sqrt{xy}=\frac{y}{2}+3 \Leftrightarrow x+2\sqrt{xy}=\frac{x}{2}-\sqrt{xy}+\frac{y}{2}+3 \Leftrightarrow x+2\sqrt{xy}=\frac{1}{2}\left(\sqrt{x}-\sqrt{y}\right)^2+3$$

Suy ra: $x+2\sqrt{xy}\ge 3$. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x=y=1$.

Ta sẽ chứng minh: $\dfrac{x^3+y^3}{x^2+xy+y^2}\ge\dfrac{x+y}{3}$ (*)

Thật vậy, $(*)\Leftrightarrow\dfrac{(x+y)\left(x^2-xy+y^2\right)}{x^2+xy+y^2}\ge\dfrac{x+y}{3}$

$$\Leftrightarrow\frac{x^2-xy+y^2}{x^2+xy+y^2}\ge\frac{1}{3}\quad(\text{ do } x+y>0\ )$$

$$\Leftrightarrow 3\left(x^2-xy+y^2\right)\ge x^2+xy+y^2\Leftrightarrow(x-y)^2\ge 0\quad(\text{luôn đúng})$$

Suy ra: $x+\dfrac{6\left(x^3+y^3\right)}{x^2+xy+y^2}-\sqrt{2\left(x^2+y^2\right)}\ge x+2(x+y)-\sqrt{2\left(x^2+y^2\right)}$

Mặt khác, ta có: $2(x+y)-\sqrt{2\left(x^2+y^2\right)}\ge 2\sqrt{xy}\Leftrightarrow 2\left[(x+y)-\sqrt{xy}\right]\ge\sqrt{2\left(x^2+y^2\right)}$

$$\Leftrightarrow 4\left(x^2+y^2+xy-2x\sqrt{xy}-2y\sqrt{xy}+2xy\right)\ge 2\left(x^2+y^2\right)$$

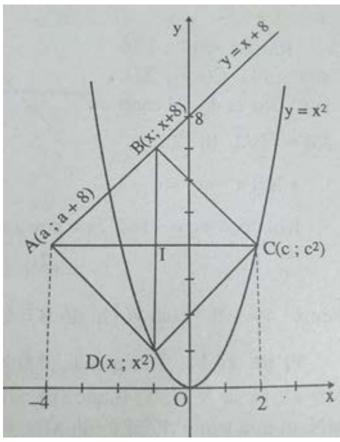
$$\Leftrightarrow x^2+y^2+6xy-4x\sqrt{xy}-4y\sqrt{xy}\ge 0\Leftrightarrow\left(\sqrt{x}-\sqrt{y}\right)^4\ge 0\ (\text{luôn đúng}).$$

Khi đó: $x+\dfrac{6\left(x^3+y^3\right)}{x^2+xy+y^2}-\sqrt{2\left(x^2+y^2\right)}\ge x+2\sqrt{xy}\ge 3$.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x=y=1$.

Vậy hệ phương trình đã cho có nghiệm duy nhất $(x;y)=(1;1)$. ❒

Câu 3



Vì $BC\perp d$ và d tạo với Ox góc $\widehat{CDB}=45^0$ nên $BD\perp Ox$ hoặc $BD//Ox$. Không mất tính tổng quát, giả sử $BD\perp Ox$ (vì nếu $BD//Ox$ thì chỉ cần đổi vị trí của A và B sẽ có $BD\perp Ox$).

Gọi $A(a;a+8)\in d$; $B(b;b+8)\in d$; $C(c;c^2)\in(P)$;

$D(d;d^2)\in(P)$, trong đó $a+8=c^2$ và $b=d=\dfrac{a+c}{2}$.

Gọi $I=AC\cap BD$. Ta có $ID\perp Ox$ và $IC\perp Ox$ nên

$ID = \left|b^2 - c^2\right|$ và $IC = \left|b - c\right|$.

Do $IB = IC$ nên $b^2 - c^2 = b - c$ hoặc $b^2 - c^2 = c - b$.

- Xét $b^2 - c^2 = b - c$. Vì $b \neq c$ nên $b + c = 1$. Khi đó

$$2b = a + c = c + c^2 - 8 = (1-b) + (1-b)^2 - 8$$

hay $b^2 - 5b - 6 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} b = -1 \Rightarrow c = 2, a = -4 \\ b = 6 \Rightarrow c = -5, a = 17 \end{array}\right.$.

Do đó $A(-4;4), B(-1;7), C(2;4), D(-1;1)$ và $AB = 3\sqrt{2}$.

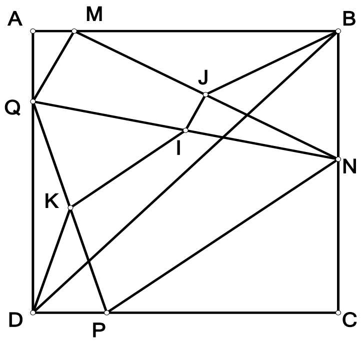
hoặc $A(17;25), B(6;14), C(-5;25), D(6;36)$ và $AB = 11\sqrt{2}$.

- Xét $b^2 - c^2 = c - b$. Vì $b \neq c$ nên $b + c = -1$. Khi đó

$$2b = c + a = c + (c^2 - 8) = (-1-b) + (1+b)^2 - 8$$

hay $b^2 = b + 8$ (vô lý vì $B \equiv D$). ❒

Câu 4



a) Gọi I, J, K lần lượt là trung điểm của QN, MN, PQ.

Khi đó $BJ = \frac{1}{2}MN$ (trung tuyến tam giác vuông MBN)

Tương tự $DK = \frac{1}{2}PQ$.

$IJ = \frac{1}{2}QM$ (do IJ là đường trung bình của $\triangle MNQ$).

Tương tự $IK = \frac{1}{2}PN$.

Vì $BD \leq BJ + JI + IK + KD$ nên

$$S_{ABCD} = \frac{AC}{2}.BD \leq \frac{AC}{2}(BJ + JI + IK + KD) = \frac{AC}{4}(MN + NP + PQ + QM).$$

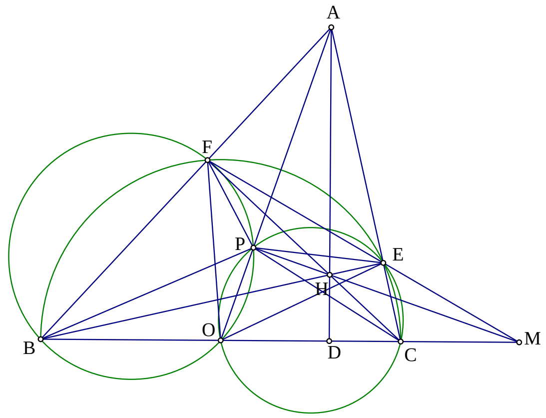
b) Chu vi tứ giác $MNPQ$ là:

$$MN + NP + PQ + QM = 2BJ + 2IK + 2DK + 2IJ$$

$$= 2(BJ + JI + IK + KD) \geq 2BD.$$

Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ đường gấp khúc trùng với BD, tức là $MQ // NP$, $MN // PQ$, $MN = PQ$ (vì cùng là cạnh huyền 2 tam giác vuông cân bằng nhau), lúc đó $MNPQ$ là hình chữ nhật. ❒

Câu 5



a) Điểm P trong bài toán chính là điểm Miquel của tam giác ABC.

Ta dễ thấy 4 điểm A, F, H, E cùng nằm trên đường tròn đường kính AH.

Bây giờ ta chứng minh $AFPE$ là tứ giác nội tiếp.

Thật vậy ta có

$$\widehat{FPE} = 360^0 - \widehat{FPO} - \widehat{EPO}$$
$$= 360^0 - \left(180^0 - \widehat{B}\right) - \left(180^0 - \widehat{C}\right) = \widehat{B} + \widehat{C} \text{ suy ra } \widehat{EPF} + \widehat{A} = 180^0$$

$\Rightarrow AEPF$ là tứ giác nội tiếp hay 5 điểm A, E, P, F, H cùng nằm trên đường tròn đường kính $AH \Rightarrow EFPH$ là tứ giác nội tiếp.

Xét tứ giác $BPHC$ ta có:

$$\widehat{BPH} = \widehat{BPE} - \widehat{HPE} = \widehat{BPO} + \widehat{OPE} - \widehat{HFE} = \widehat{BFO} + 180^0 - \widehat{C} - \widehat{HBC}$$
$$= \widehat{B} + 180^0 - \widehat{C} - \left(90^0 - \widehat{C}\right) = 90^0 + \widehat{B}.$$

Mặt khác, $\widehat{HCB} = 90^0 - \widehat{B} \Rightarrow \widehat{HCB} + \widehat{BPH} = 180^0$ hay $BCHP$ là tứ giác nội tiếp.

Ta có: $\widehat{FPA} = \widehat{FEA} = \widehat{FBC} \Rightarrow \widehat{FPA} + \widehat{FPO} = 180^0 \Rightarrow A, P, O$ thẳng hàng

$$\widehat{FEP} = \widehat{FAP} = \frac{1}{2} sđ\left(\overset{\frown}{BO} - \overset{\frown}{FP}\right),\ \widehat{PBM} = \widehat{PFO} = \frac{1}{2} sđ\overset{\frown}{PO} = \frac{1}{2} sđ\left(\overset{\frown}{FO} - \overset{\frown}{FP}\right).$$

Lại có: $OB = OF \Rightarrow sđ\overset{\frown}{OB} = sđ\overset{\frown}{OF}$ suy ra $\widehat{FEP} = \widehat{PBM} \Leftrightarrow MEPB$ là tứ giác nội tiếp.

b) Theo câu a) ta có $MEPB$ nội tiếp nên $\widehat{BPM} = \widehat{BEM} \Leftrightarrow \widehat{BPO} + \widehat{OPM} = \widehat{BEC} + \widehat{CEM}$

$\Leftrightarrow \widehat{BPO} + \widehat{OPM} = \widehat{BEC} + \widehat{AEF}$ mà $\widehat{AEF} = \widehat{FBO} = \widehat{BFO} = \widehat{BPO} \Rightarrow \widehat{OPM} = \widehat{BEC} = 90^0$

hay $\triangle OPM$ là tam giác vuông tại P. ❒

Câu 6

Bất đẳng thức đã cho tương đương với

$$6 - \left[\frac{4a^2 + (b-c)^2}{2a^2 + b^2 + c^2} + \frac{4b^2 + (c-a)^2}{2b^2 + c^2 + a^2} + \frac{4c^2 + (a-b)^2}{2c^2 + a^2 + b^2}\right] \le 3$$

$$\Leftrightarrow \left[2 - \frac{4a^2 + (b-c)^2}{2a^2 + b^2 + c^2}\right] + \left[2 - \frac{4b^2 + (c-a)^2}{2b^2 + c^2 + a^2}\right] + \left[2 - \frac{4c^2 + (a-b)^2}{2c^2 + a^2 + b^2}\right] \le 3$$

$$\Leftrightarrow \frac{(b+c)^2}{2a^2+b^2+c^2}+\frac{(c+a)^2}{2b^2+c^2+a^2}+\frac{(a+b)^2}{2c^2+a^2+b^2}\le 3 \qquad (*).$$

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy – Schwarz dạng phân thức ta có

$$\frac{b^2}{b^2+a^2}+\frac{c^2}{c^2+a^2}\ge \frac{(b+c)^2}{2a^2+b^2+c^2};$$

$$\frac{c^2}{c^2+b^2}+\frac{a^2}{a^2+b^2}\ge \frac{(c+a)^2}{2b^2+c^2+a^2};$$

$$\frac{a^2}{a^2+c^2}+\frac{b^2}{b^2+c^2}\ge \frac{(a+b)^2}{2c^2+a^2+b^2}.$$

Cộng vế theo vế các bất đẳng thức trên ta được bất đẳng thức (*).❒

Câu 7

Ta xét hàng có ô ghi số 1 và cột có ô ghi số 121, khi đó hiệu giữa hai số ghi ở hai ô này là 120.

Số ô vuông cách nhau từ ô ghi số 1 đến ô ghi số 121 nhiều nhất là 20 cặp ô vuông (10 cặp theo hàng, 10 cặp theo cột). Ví dụ trong bảng trên ô ghi số 1 và ô ghi số 121 cách nhau 4 cặp ô vuông $(1;a_1),(a_1;a_2)(a_2;a_3),(a_3;121)$.

1	a_1	a_2
		a_3
		121

Nếu hiệu của hai số trong hai ô kề nhau nào đó cũng chỉ là 5 thì qua 20 cặp ta có sự chênh lệch là $20.5=100$. Như vậy $1+100=101<121$. Do đó ắt có hai ô kề nhau nào đó sao cho hiệu hai số viết trong hai ô lớn hơn 5. ❒

==Hết===

BỘ ĐỀ LUYỆN THI VÀO LỚP 10 CHUYÊN TOÁN

HƯỚNG DẪN GIẢI ĐỀ SỐ 25

Câu 1

a) Với $x \neq -1$ ta có

$$P = \frac{a}{a+1} + \sqrt{(a+1)^2 - 2a + \frac{a^2}{a+1}}$$

$$= \frac{a}{a+1} + \sqrt{(a+1)^2 - 2(a+1).\frac{a}{a+1} + \frac{a^2}{(a+1)^2}}$$

$$= \frac{a}{a+1} + \sqrt{\left[(a+1) - \frac{a}{a+1}\right]^2}$$

$$= \frac{a}{a+1} + \left|(a+1) - \frac{a}{a+1}\right|.$$

Để ý rằng

$(a+1) - \dfrac{a}{a+1} = \dfrac{a^2+a+1}{a+1}$ dương nếu $a > -1$ và âm nếu $a < -1$ (do $a^2 + a + 1 > 0, \forall a$)

Suy ra

- Nếu $a > -1$ thì $P = \dfrac{a}{a+1} + (a+1) - \dfrac{a}{a+1} = a+1$.
- Nếu $a < -1$ thì $P = \dfrac{a}{a+1} + \dfrac{a}{a+1} - (a+1) = -\dfrac{a^2+1}{a+1}$.
- Nếu $a = 2020$ thì $P = a + 1 = 2021$. ❐

b) **Cách 1**

Viết lại phương trình đã cho như sau

$$2qn(p+1) = (n+2)(2pq + p + q + 1) \quad (*)$$

Do vế trái là số chẵn nên $n+2$ chẵn hoặc $p+q+1$ chẵn. Suy ra $p = 2$ hoặc $q = 2$ hoặc n chẵn.

- Nếu $p = 2$ thì $6qn = (n+2)(5q+3) \Leftrightarrow 6qn = 5qn + 3n + 10q + 6$

$$\Leftrightarrow qn - 3n - (10q - 30) = 36 \Leftrightarrow (q-3)(n-10) = 36.$$

Xét các ước của 36 và để ý q là số nguyên tố, ta tìm được các bộ (p,q,n) thỏa mãn yêu cầu là $(2,5,28),(2,7,19)$.

- Nếu $q=2$ thì $4n(p+1)=(n+2)(5p+3) \Leftrightarrow n=pn+10p+6$ là một điều mâu thuẫn vì $n<pn$.
- Cuối cùng, giả sử $n=2k$. Ta có thể giả sử rằng p và q là các số nguyên tố lẻ. Phương trình (*) trở thành $2kq(p+1)=(k+1)(2pq+p+q+1)$. Vế trái là số chẵn và $2pq+p+q+1$ là số lẻ nên $k+1$ là số chẵn, vì vậy $k=2l+1$ là số lẻ. Bây giờ ta có $q(p+1)(2l+1)=(l+1)(2pq+p+q+1) \Leftrightarrow lq(p+1)=(l+1)(pq+p+1)$.

Để ý rằng $q \mid pq+p+1$ khi và chỉ khi $q \mid p+1$. Hơn nữa, do $\gcd(p,p+1)=1$ và q là số nguyên tố nên $\gcd(p+1,pq+p+1)=(p+1,pq)=(p+1,q)>1$ khi và chỉ khi $q \mid p+1$.

Từ $\gcd(l,l+1)=1$, ta thấy rằng nếu $q \nmid p+1$ thì $l=pq+p+1$ và $l+1=q(p+1)$. Do đó $q=p+2$ (và $(p,p+2,2p^2+6p+3)$ thỏa mãn phương trình đã cho).

Trong trường hợp ngược lại, giả sử $p+1=rq$, ta có $l(p+1)=(l+1)(p+r)$ là một điều mâu thuẫn vì $l<l+1$ và $p+1\le p+r$.

Như vậy các giá trị dương của $q-p$ là 2; 3 và 5.

Cách 2

Trừ 2 và nhân -1 vế theo vế ta được, điều kiện bài toán tương đương với

$$\frac{1}{p+1}-\frac{1}{q}=\frac{4}{n+2} \qquad (*)$$

Do đó $q>p+1$. Viết lại điều kiện (*) như sau

$$q-p-1=\frac{4(p+1)q}{n+2}.$$

Biểu thức ở vế phải là một số nguyên dương và q phải khử được $n+2$ nếu không q chia hết cho $p+1<q$.

Đặt $\dfrac{n+2}{q}=u$ là một số nguyên dương.

Bây giờ $q-p-1=\dfrac{4(p+1)}{u} \Leftrightarrow uq-u(p+1)=4(p+1)$.

Suy ra $p+1 \mid uq$. Hơn nữa, q là một số nguyên tố và $p+1<q$, do đó $p+1 \mid u$.

Đặt $v=\dfrac{u}{p+1}$ là một số nguyên.

Bây giờ $q-p=1+\frac{4}{v}\in\{2;3;5\}$.

Các trường hợp có thể xảy ra của (p,q,n) là $(3,5,7),(2,5,28)$ hoặc $(2,7,19)$.

Để ý rằng tất cả các cặp nguyên tố sinh đôi $q=p+2$ cho ta nghiệm $(p,p+2,2(2p^2+6p+3))$.

<u>Cách 3</u>

Trừ cả hai vế cho 2 ta được

$$\frac{1}{p+1}-\frac{1}{q}=\frac{4}{n+2} \quad (*)$$

Từ đây, vì n là số dương, ta có $q>p+1$. Do đó q và $p+1$ nguyên tố cùng nhau (do q nguyên tố).

Điều kiện (*) được viết lại như sau

$$\frac{q-p-1}{q(p+1)}=\frac{4}{n+2}.$$

Bây giờ $\gcd(q,q-p-1)=\gcd(q,p+1)=1=\gcd(p+1,q)=1$ nên phân số ở vế trái tối giản. Do đó $q-p-1|4$. Vì $q-p-1$ dương nên $q-p-1\in\{1;2;4\}$ hay $q-p\in\{2;3;5\}$. Tất cả các bộ số có được là

$$(p,q,n)\in\{(3,5,78),(2,5,28),(2,7,19)\}. \ \square$$

Câu 2

a) Điều kiện: $\frac{5}{3}\le x\le\frac{7}{3}$.

Do $9x^2-36x+38=9(x-2)^2+2>0$ nên phương trình đã cho tương đương với

$3x-5+7-3x+2\sqrt{-9x^2+36x-35}=(9x^2-36x+38)^2$

$\Leftrightarrow 2+2\sqrt{-9x^2+36x-35}=(9x^2-36x+38)^2 \quad (*)$

Đặt $t=\sqrt{-9x^2+36x-35}=\sqrt{1-9(x-2)^2}\le 1$. Suy ra $0<t\le 1$.

Phương trình (*) trở thành

$2+2t=(-t^2+3)^2 \Leftrightarrow t^4-6t^2-2t+7=0$

$\Leftrightarrow (t^4-t^3)+(t^3-t^2)-(5t^2-5t)-(7t-7)=0$

$\Leftrightarrow (t-1)(t^3+t^2-5t-7)=0$.

Do $0 < t \le 1$ nên $t^3 + t^2 - 5t - 7 \le 1^3 + 1^2 - 5.0 - 7 < 0$ nên $t - 1 = 0 \Leftrightarrow t = 1$.

Với $t = 1$ ta có $\sqrt{-9x^2 + 36x - 35} = 1 \Leftrightarrow 9(x-2)^2 = 0 \Leftrightarrow x = 2$.

Vậy phương trình đã cho có nghiệm duy nhất $x = 2$. ❒

b) **Lời giải**

Ta có

$$\begin{cases} 3x^2 + 2y^2 - 4xy + x + 8y - 4 = 0 \\ x^2 - y^2 + 2x + y - 3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x^2 + 2y^2 - 4xy + x + 8y - 4 = 0 & (1) \\ 2x^2 - 2y^2 + 4x + 2y - 6 = 0 & (2) \end{cases}$$

Lấy phương trình thứ nhất trừ phương trình thứ hai vế theo vế ta được

$$\left(x - 2y\right)^2 - 3(x - 2y) + 2 = 0$$

$$\Leftrightarrow (x - 2y - 1)(x - 2y - 2) = 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 2y + 1 \\ x = 2y + 2 \end{array}\right.$$

- Với $x = 2y + 1$, thay vào phương trình $x^2 - y^2 + 2x + y - 3 = 0$ ta được

$$(2y+1)^2 - y^2 + 2(2y+1) + y - 3 = 0 \Leftrightarrow 3y^2 + 9y = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y = 0 \Rightarrow x = 1 \\ y = -3 \Rightarrow x = -5 \end{array}\right.$$

- Với $x = 2y + 2$, giải tương tự như trên ta thu được các nghiệm

$$\left(\frac{-7 + \sqrt{109}}{3}; \frac{-13 + \sqrt{109}}{6}\right); \left(\frac{-7 - \sqrt{109}}{3}; \frac{-13 - \sqrt{109}}{6}\right)$$

Vậy tập nghiệm của hệ phương trình đã cho là

$$S = \left\{(1;0); (-5-3); \left(\frac{-7 + \sqrt{109}}{3}; \frac{-13 + \sqrt{109}}{6}\right); \left(\frac{-7 - \sqrt{109}}{3}; \frac{-13 - \sqrt{109}}{6}\right)\right\}.$$ ❒

Câu 3

Hệ số góc của đường thẳng A_1A_2 là $\dfrac{a_2^2 - a_1^2}{a_2 - a_1} = a_2 + a_1$.

Hệ số góc của đường thẳng A_4A_5 là $\dfrac{a_5^2 - a_4^2}{a_5 - a_4} = a_5 + a_4$.

Do đó $A_1A_2 \perp A_4A_5 \Leftrightarrow (a_1 + a_2)(a_4 + a_5) = -1$.

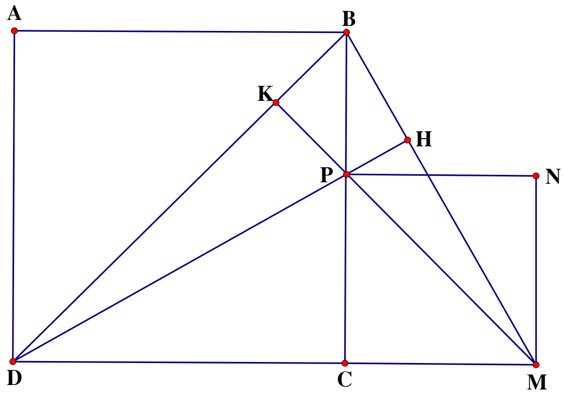
Tương tự, $(a_2+a_3)(a_5+a_6)=-1$.

Nếu $A_3A_4 \perp A_6A_1$ thì $(a_3+a_4)(a_6+a_1)=-1$.

Khi đó $(a_1+a_2)(a_2+a_3)(a_3+a_4)(a_4+a_5)(a_5+a_6)(a_6+a_1)=-1$.

Vậy nếu $(a_1+a_2)(a_2+a_3)(a_3+a_4)(a_4+a_5)(a_5+a_6)(a_6+a_1)\neq -1$ thì A_3A_4 và A_6A_1 không thể vuông góc với nhau. ❒

Câu 4



a) Xét $\triangle DPC$ và $\triangle BMC$ có

$$CD=BC;\ PC=CM\ ;\ \widehat{DCB}=\widehat{BCN}=90^0.$$

Do đó $\triangle DPC = \triangle BMC$ (c – g – c).

Suy ra $\widehat{PDC}=\widehat{MBC}$. Điều này dẫn đến $\widehat{MBC}+\widehat{BPH}=\widehat{PDC}+\widehat{CPD}=90^0$.

Vậy $\widehat{BHP}=90^0$.

Dễ thấy P là trực tâm của $\triangle BDM$, suy ra $MP\perp BD$.

Ta có $\dfrac{PC}{BC}=\dfrac{\frac{1}{2}.DM.PC}{\frac{1}{2}.DM.BC}=\dfrac{S_{PDM}}{S_{BDM}}$.

Tương tự, $\dfrac{PH}{DH}=\dfrac{\frac{1}{2}.DB.KP}{\frac{1}{2}.DB.MK}=\dfrac{S_{PBM}}{S_{BDM}}$; $\dfrac{PH}{DH}=\dfrac{\frac{1}{2}.DB.KP}{\frac{1}{2}.DB.MK}=\dfrac{S_{PBD}}{S_{BDM}}$.

Vậy $\dfrac{PC}{BC}+\dfrac{PH}{DH}+\dfrac{KP}{MK}=\dfrac{S_{PDM}+S_{PBM}+S_{PBD}}{S_{BDM}}=1$.

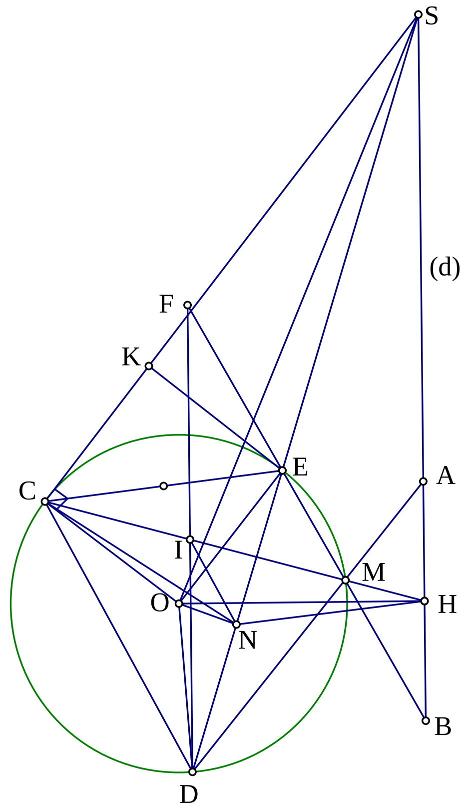
b) Ta có

$\triangle MCP \sim \triangle MKD$ (g – g) $\Rightarrow \dfrac{MP}{MD} = \dfrac{MC}{MK} \Rightarrow MP.MK = MC.MD$. (1)

$\triangle DCB \sim \triangle DKM$ (g – g) $\Rightarrow \dfrac{DC}{DK} = \dfrac{DB}{DM} \Rightarrow DK.DB = DC.DM$. (2)

Cộng vế theo vế (1) và (2) ta được $MP.MK + DK.BD = DM^2$. ❒

Câu 5



Dựng đường thẳng qua D song song với đường thẳng (d) cắt HC, BM tại I, F. Khi đó ta dễ chứng minh được I là trung điểm của DF theo định lý Thales.
Từ đó suy ra IN là đường trung bình của tam giác IEF.
Để chứng minh tứ giác $HNCS$ nội tiếp ta chứng minh $\widehat{NCH} = \widehat{HSN}$.
Mặt khác ta có $\widehat{IDN} = \widehat{NSH}$ so le trong.
Như vậy ta cần chứng minh $\widehat{NCH} = \widehat{IDN}$ hay chứng minh $ICDN$ nội tiếp.

Thật vậy $\widehat{INE} = \widehat{NEM}$ (so le trong) mà $\widehat{MEN} \equiv \widehat{MED} = \widehat{MCD}$ suy ra

$\widehat{INE} = \widehat{MCD}$ hay $ICDN$ là tứ giác nội tiếp.

b) Do tứ giác $HNCS$ nên $\widehat{SNH} = \widehat{SCH}$.
Do tứ giác $ONHS$ nội tiếp nên $\widehat{SNH} = \widehat{SOH}$ suy ra $\widehat{SCH} = \widehat{SOH}$.
hay tứ giác $SCOH$ là tứ giác nội tiếp.

Nhưng $\widehat{OHS}=90^0 \Rightarrow \widehat{OCS}=90^0 \Rightarrow SC$ là tiếp tuyến của (O). Mà KC cũng là tiếp tuyến của (O) nên ta suy ra S,K,C thẳng hàng. ❐

Câu 6

Bình phương hai vế của bất đẳng thức cần chứng minh ta được bất đẳng thức tương đương:

$$3-\left(\frac{x+y}{2}\right)^2-\left(\frac{y+z}{2}\right)^2-\left(\frac{x+z}{2}\right)^2+2\sum_{cyc}\sqrt{1-\left(\frac{x+y}{2}\right)^2}.\sqrt{1-\left(\frac{y+z}{2}\right)^2}\ge 6.$$

$$\Leftrightarrow \sum_{cyc}\sqrt{1-\left(\frac{x+y}{2}\right)^2}.\sqrt{1-\left(\frac{y+z}{2}\right)^2}\ge \frac{7}{4}+\frac{xy+yz+zx}{4} \quad (*)$$

Ta có $1-\left(\frac{x+y}{2}\right)^2=\frac{x^2+y^2+(z^2+1)}{2}-\left(\frac{x+y}{2}\right)^2=\frac{(x-y)^2}{4}+\frac{z^2+1}{2}$.

Tương tự $1-\left(\frac{y+z}{2}\right)^2=\frac{(y-z)^2}{4}+\frac{x^2+1}{2}$.

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy-Schwart ta được:

$$\sqrt{1-\left(\frac{x+y}{2}\right)^2}.\sqrt{1-\left(\frac{y+z}{2}\right)^2}=\sqrt{\frac{(x-y)^2}{4}+\frac{z^2+1}{2}}.\sqrt{\frac{(y-z)^2}{4}+\frac{x^2+1}{2}}$$
$$\ge \frac{(x-y)(z-y)}{4}+\frac{\sqrt{(x^2+1)(z^2+1)}}{2}\ge \frac{(x-y)(z-y)}{4}+\frac{xz+1}{2}$$
$$=\frac{y^2+xz-yz-xy}{4}+\frac{xz+1}{2}$$

Cộng theo vế các BĐT tương tự ta được:

$$\sum_{cyc}\sqrt{1-\left(\frac{x+y}{2}\right)^2}.\sqrt{1-\left(\frac{y+z}{2}\right)^2}\ge \frac{x^2+y^2+z^2-(xy+yz+zx)}{4}+\frac{xy+yz+zx+3}{2}$$

hay $\sum_{cyc}\sqrt{1-\left(\frac{x+y}{2}\right)^2}.\sqrt{1-\left(\frac{y+z}{2}\right)^2}\ge \frac{7}{4}+\frac{(xy+yz+zx)}{4}$.

Vậy (*) được chứng minh.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x=y=z=\frac{1}{\sqrt{3}}$. ❐

Câu 7

Kí hiệu các đỉnh liên tiếp của đa giác đều 15 cạnh là

$$A_1, B_1, C_1, A_2, B_2, C_2, A_3, B_3, C_3, A_4, B_4, C_4, A_5, B_5, C_5.$$

Khi đó ta có 3 ngũ giác đều rời nhau là

$$A_1A_2A_3A_4A_5;\ B_1B_2B_3B_4B_5;\ C_1C_2C_3C_4C_5.$$

Theo nguyên lí Dirichlet trong 7 đỉnh đã chọn có 3 đỉnh cùng là đỉnh của một ngũ giác đều nào đó trong 3 ngũ giác đều ở trên.

Mặt khác, trong một ngũ giác đều thì 3 đỉnh bất kì luôn là 3 đỉnh của một tam giác cân. Vậy ta hoàn tất chứng minh. ❒