

## ÔN TẬP TUYỂN SINH LỚP 10

### CHUYÊN ĐỀ HÀM SỐ VÀ ĐỒ THỊ HÀM SỐ

#### I. Lý thuyết

##### Định nghĩa

- Hàm số bậc nhất là hàm số được cho bởi công thức  $y = ax + b$  trong đó  $a, b$  là các số cho trước và  $a \neq 0$
- Phương trình bậc nhất hai ẩn có dạng  $ax + by = c$  ( $a, b, c$  là các số đã biết,  $a \neq 0$  hoặc  $b \neq 0$ ). Nếu  $b \neq 0$  thì có thể đưa phương trình về dạng  $y = mx + n$
- Hàm số  $y = ax^2$  ( $a \neq 0$ ) là hàm số bậc hai đặc biệt

##### Tính chất

- Hàm số bậc nhất  $y = ax + b$  ( $a \neq 0$ ) xác định với mọi giá trị của  $x \in \mathbb{R}$  và
  - ✓ Đồng biến trên  $\mathbb{R}$  khi  $a > 0$
  - ✓ Nghịch biến trên  $\mathbb{R}$  khi  $a < 0$
- Hàm số  $y = ax^2$  ( $a \neq 0$ ) xác định với mọi giá trị của  $x \in \mathbb{R}$  và:
  - ✓ Nếu  $a > 0$  thì hàm số nghịch biến khi  $x < 0$ , đồng biến khi  $x > 0$
  - ✓ Nếu  $a < 0$  thì hàm số nghịch biến khi  $x > 0$ , đồng biến khi  $x < 0$

##### Đồ thị hàm số

- Đồ thị của hàm số  $y = ax + b$  ( $a \neq 0$ ) là một đường thẳng:
  - ✓ Cắt trục tung tại điểm có tung độ bằng  $b$ .
  - ✓ Song song với đường thẳng  $y = ax$  nếu  $b \neq 0$  và trùng với đường thẳng  $y = ax$  nếu  $b = 0$
- Số  $a$  gọi là hệ số góc, số  $b$  gọi là tung độ gốc của đường thẳng.
- Gọi  $\alpha$  là góc tạo bởi đường thẳng  $y = ax + b$  ( $a \neq 0$ ) và trục  $Ox$ 
  - ✓ Nếu  $a > 0$  thì  $\tan \alpha = a$
  - ✓ Nếu  $a < 0$  thì  $\tan \beta = |a|$  với  $\beta = 180^\circ - \alpha$
- Đồ thị của hàm số  $y = ax^2$  ( $a \neq 0$ ) là một Parabol đỉnh  $O$  và nhận trục  $Oy$  làm trục đối xứng.
  - ✓ Nếu  $a > 0$  thì đồ thị nằm phía trên trục hoành,  $O$  là điểm thấp nhất của đồ thị. Giá trị nhỏ nhất của hàm số là  $y = 0$
  - ✓ Nếu  $a < 0$  thì đồ thị nằm phía dưới trục hoành,  $O$  là điểm cao nhất của đồ thị. Giá trị lớn nhất của hàm số là  $y = 0$

##### Vị trí tương đối của các đồ thị



Cho các đường thẳng  $(d): y = ax + b (a \neq 0)$ ;  $(d'): y = a'x + b' (a' \neq 0)$  và parabol

$(P): y = kx^2 (k \neq 0)$ . Khi đó:

- $(d)$  cắt  $(d') \Leftrightarrow a \neq a'$
- $(d) // (d') \Leftrightarrow a = a'$  và  $b \neq b'$
- $(d) \equiv (d') \Leftrightarrow a = a'$  và  $b = b'$
- $(d) \perp (d') \Leftrightarrow a.a' = -1$

Xét phương trình  $kx^2 = ax + b$  (\*)

- Nếu phương trình (\*) vô nghiệm thì  $(P)$  và  $(d)$  không giao nhau.
- Nếu phương trình (\*) có hai nghiệm phân biệt thì  $(P)$  và  $(d)$  cắt nhau tại hai điểm phân biệt.
- Nếu phương trình (\*) có nghiệm kép thì  $(P)$  và  $(d)$  tiếp xúc nhau.

### Mở rộng

- Cho điểm  $A(x_1; y_1)$  và  $B(x_2; y_2)$ . Khi đó ta có  $AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$
- Khoảng cách  $h$  từ gốc tọa độ  $O$  đến đường thẳng  $y = ax + b$ :  $h = \frac{|c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$

## II. Một số bài toán minh họa

### Bài toán 1.

- Vẽ đồ thị của các hàm số  $y = 3x + 4$  và  $y = -\frac{x^2}{2}$  trên cùng một hệ trục tọa độ
- Tìm tọa độ các giao điểm của hai đồ thị ấy bằng phép tính.

### Hướng dẫn giải.

- Vẽ đồ thị của các hàm số  $y = 3x + 4$  và  $y = -\frac{x^2}{2}$  trên cùng một hệ trục tọa độ

TXĐ:  $D = \mathbb{R}$

*\*Sử dụng máy tính để lập nhanh bảng giá trị:*

Vào phương thức TABLE: **MENU** **8**

Nhập vào hàm số:  $f(x) = 3x + 4$  **3** **x** **+** **4**

$$f(x) = 3x + 4$$

Nhập vào hàm số:  $g(x) = -\frac{x^2}{4}$

$$g(x) = -\frac{x^2}{4}$$

Nhập bảng giá trị:

Phạm vi bảng  
 Đầu : -2  
 Kthúc : 2  
 Bước : 1

Bảng giá trị

x	f(x)	g(x)
1	-2	-1
2	1	-0.25
3	4	0
4	7	-0.25

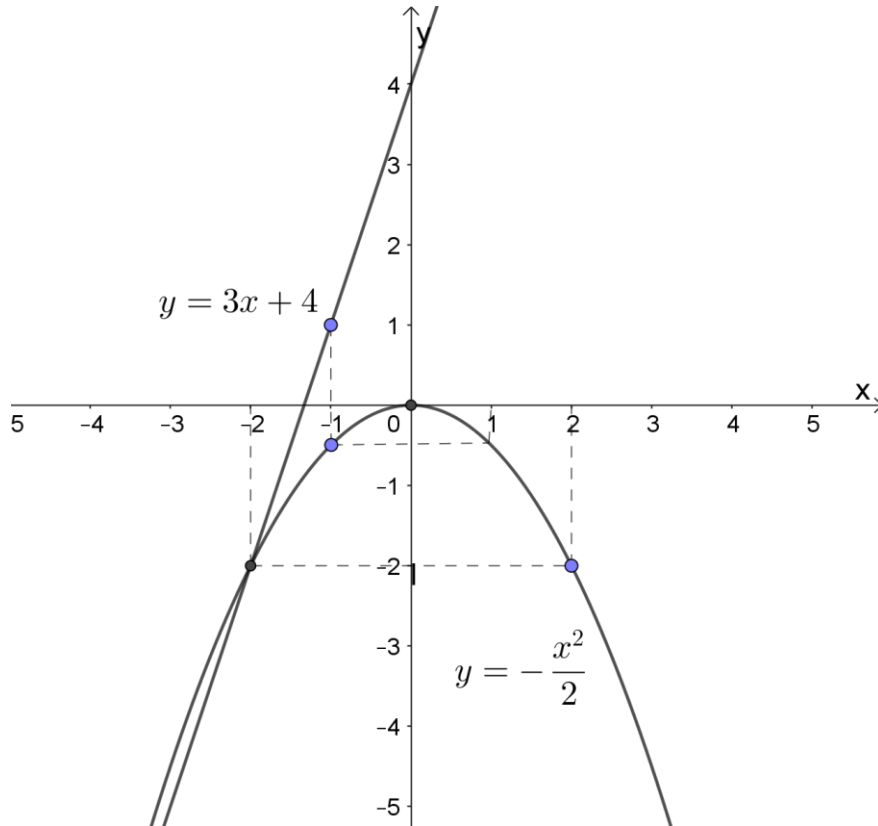
Bảng giá trị

$$d : y = 3x + 4$$

x	-1	-2
$y = 3x + 4$	1	-2

$$(P) : y = -\frac{x^2}{2}$$

x	-2	-1	0	1	2
$y = -\frac{x^2}{2}$	-2	$-\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	-2



b. Tìm tọa độ các giao điểm của hai đồ thị ấy bằng phép tính.

Phương trình hoành độ giao điểm của  $(P)$  và  $(d)$  là:

$$-\frac{x^2}{2} = 3x + 4 \Leftrightarrow x^2 + 6x + 8 = 0 \Leftrightarrow (x + 4)(x + 2) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -4 \\ x = -2 \end{cases}$$

- Với  $x = -4$  thì  $y = 3x + 4 = -8$
- Với  $x = -2$  thì  $y = 3x + 4 = -2$

Vậy  $(P)$  cắt  $(d)$  tại hai điểm  $(-4; -8); (-2; -2)$

**Bài toán 2.** Cho hàm số  $y = \frac{-x^2}{4}$  có đồ thị  $(P)$

- Vẽ đồ thị  $(P)$
- Tìm các điểm  $M \in (P)$  có tung độ và hoành độ đối nhau.
- Tìm các điểm  $N \in (P)$  có tung độ bằng 3 lần hoành độ
- Tìm  $m$  để  $(P)$  cắt đồ thị  $(d): y = \frac{1}{2}x - m$  tại điểm có hoành độ bằng  $-4$

**Hướng dẫn giải**



a. Vẽ đồ thị ( $P$ )

TXĐ:  $D = \mathbb{R}$

Bảng giá trị

*\*Sử dụng máy tính để lập nhanh bảng giá trị:*

Vào phương thức TABLE: **MENU** **8**

Nhập vào hàm số:  $f(x) = -\frac{x^2}{4}$  **-** **x** **x<sup>2</sup>** **=** **4**

$f(x) = -\frac{x^2}{4}$

Nhập bảng giá trị:

Phạm vi bảng  
Đầu :-2  
Kthúc:2  
Bước :1

Bảng giá trị

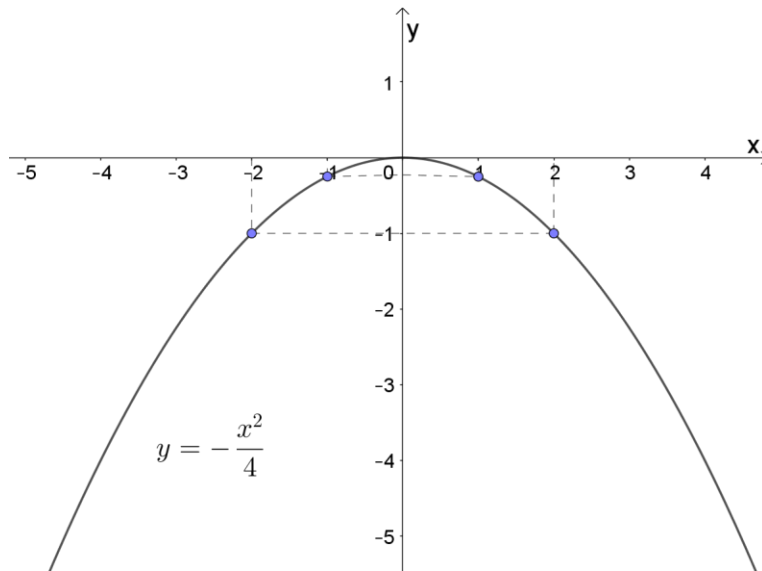
1	x	-2	f(x)	-1
2		-1		-0.25
3		0		0
4		1		-0.25

- 1 ] 4

3	x	0	f(x)	0
4		1		-0.25
5		2		-1

$x$	-2	-1	0	1	2
$y = -\frac{x^2}{4}$	-1	$-\frac{1}{4}$	0	$-\frac{1}{4}$	-1

Vẽ đồ thị



b. Tìm các điểm  $M \in (P)$  có tung độ và hoành độ đối nhau

Ta có  $M(x_M; y_M) \in (P)$  suy ra  $y_M = -\frac{x_M^2}{4}$

Do  $M$  có tung độ và hoành độ đối nhau nên  $y_M = -x_M$

Như vậy ta có:  $-x_M = -\frac{x_M^2}{4} \Leftrightarrow x_M^2 - 4x_M = 0 \Leftrightarrow x_M(x_M - 4) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x_M = 0 \\ x_M = 4 \end{cases}$

Với  $x_M = 0$  thì  $y_M = -x_M = 0$

Với  $x_M = 4$  thì  $y_M = -x_M = -4$

Vậy các điểm  $M \in (P)$  có tung độ và hoành độ đối nhau là  $M(0;0)$  và  $M(4;-4)$

c. Tìm các điểm  $N \in (P)$  có tung độ bằng 3 lần hoành độ

Ta có  $N(x_N; y_N) \in (P)$  suy ra  $y_N = -\frac{x_N^2}{4}$

Do  $N$  có tung độ bằng 3 lần hoành độ nên  $y_N = 3x_N$

Như vậy ta có  $3x_N = -\frac{x_N^2}{4} \Leftrightarrow x_N^2 + 12x_N = 0 \Leftrightarrow x_N(x_N + 12) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x_N = 0 \\ x_N = -12 \end{cases}$

Với  $x_N = 0$  thì  $y_N = 3x_N = 0$



Với  $x_N = -12$  thì  $y_M = 3x_M = -36$

Vậy các điểm  $N \in (P)$  có tung độ bằng 3 lần hoành độ là  $N(0;0)$  và  $N(-12;-36)$

d. Tìm  $m$  để  $(P)$  cắt đồ thị  $(d): y = \frac{1}{2}x - m$  tại điểm có hoành độ bằng -4

Phương trình hoành độ giao điểm của  $(P)$  và  $(d)$  là

$$-\frac{x^2}{4} = \frac{1}{2}x - m \Leftrightarrow x^2 + 2x - 4m = 0 \quad (1)$$

Do  $(P)$  cắt đồ thị  $(d): y = \frac{1}{2}x - m$  tại điểm có hoành độ bằng -4 nên  $x = -4$  là nghiệm của phương trình (1)

Suy ra ta có:  $(-4)^2 + 2(-4) - 4m = 0 \Leftrightarrow 8 - 4m = 0 \Leftrightarrow m = 2$

**Bài toán 3.** Cho hàm số  $(P): y = 2x^2$

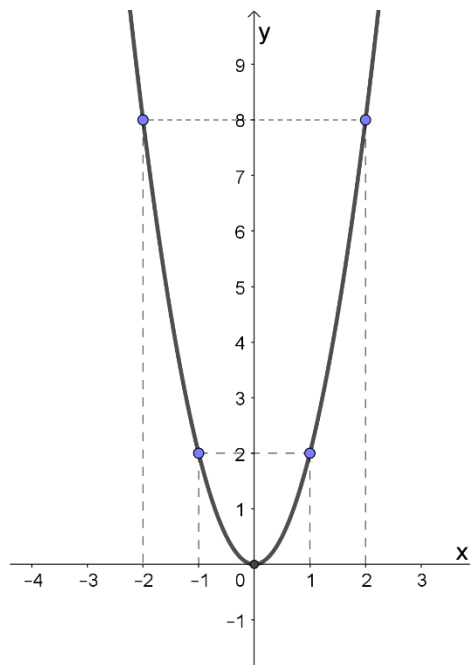
- Vẽ đồ thị  $(P)$
- Gọi  $A$  là điểm thuộc  $(P)$  có hoành độ bằng -2. Viết phương trình đường thẳng  $OA$

### Hướng dẫn giải

TXĐ:  $D = \mathbb{R}$

Bảng giá trị

$x$	$y = 2x^2$
-2	8
-1	2
0	0
1	2
2	8



- Gọi  $A$  là điểm thuộc  $(P)$  có hoành độ bằng -2. Viết phương trình đường thẳng  $OA$

Ta có  $A \in (P)$  và  $x_A = -2$ , suy ra  $y_A = 2x_A^2 = 8$

Phương trình đường thẳng OA có dạng  $y = ax + b (a \neq 0)$

Do đường thẳng qua hai điểm  $O(0;0)$  và  $A(-2;8)$  nên ta có hệ phương trình

$$\begin{cases} b = 0 \\ -2a + b = 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = 0 \\ a = -4 \end{cases}$$

Vậy phương trình đường thẳng cần tìm là:  $y = -4x$

**Bài toán 4.** Cho hàm số  $(P): y = -\frac{x^2}{2}$

- Tìm điểm thuộc  $(P)$  có hoành độ bằng  $-4$
- Tìm  $m$  để đồ thị của hàm số  $y = 2x + m$  và  $(P)$  có một điểm chung. Xác định tọa độ điểm chung này

#### Hướng dẫn giải

- Tìm điểm thuộc  $(P)$  có hoành độ bằng  $-4$

Gọi  $A(x_A, y_A)$  là điểm thuộc  $(P)$  có hoành độ bằng  $-4$

$$\text{Suy ra } y_A = -\frac{x_A^2}{2} = -\frac{(-4)^2}{2} = -8$$

Vậy  $A(-4; -8)$

- Tìm  $m$  để đồ thị của hàm số  $y = 2x + m$  và  $(P)$  có một điểm chung. Xác định tọa độ điểm chung này

Phương trình tọa độ giao điểm giữa đồ thị của hàm số  $y = 2x + m$  và  $(P)$  là

$$-\frac{x^2}{2} = 2x + m \Leftrightarrow x^2 + 4x + 2m = 0 \quad (1)$$

Hai đồ thị trên có một điểm chung

$\Leftrightarrow$  Phương trình (1) có một nghiệm duy nhất

$$\Leftrightarrow \Delta = 16 - 8m = 0 \Leftrightarrow m = 2$$

Thay  $m = 2$  vào phương trình (1) ta có  $x^2 + 4x + 4 = 0 \Leftrightarrow (x + 2)^2 = 0 \Leftrightarrow x = -2$





Với  $x = -2$  thì  $y = -\frac{x^2}{2} = -2$

Vậy với  $m = 2$  thì đồ thị của hàm số  $y = 2x + m$  và  $(P)$  giao nhau tại một điểm duy nhất là  $(-2; -2)$

**Bài toán 5.** Cho  $(P): y = -x^2$  và  $(d): y = x - 2$

- Tìm tọa độ giao điểm của  $(P)$  và  $(d)$
- Tìm  $a, b$  biết  $(d'): y = ax + b$  song song với  $(d)$  và cắt  $(P)$  tại điểm có hoành độ bằng 2

### Hướng dẫn giải

- Tìm tọa độ giao điểm của  $(P)$  và  $(d)$

Tọa độ giao điểm của  $(P)$  và  $(d)$  là nghiệm của phương trình:  $-x^2 = x - 2 \Leftrightarrow x^2 + x - 2 = 0$

Vì  $a + b + c = 1 + 1 - 2 = 0$  nên phương trình trên có 2 nghiệm phân biệt  $x_1 = 1; x_2 = -2$

- Với  $x = 1$  thì  $y = x - 2 = -1$
- Với  $x = -2$  thì  $y = x - 2 = -4$

Vậy  $(P)$  và  $(d)$  giao nhau tại hai điểm  $(1; -1)$  và  $(-2; -4)$

- Tìm  $a, b$  biết  $(d'): y = ax + b$  song song với  $(d)$  và cắt  $(P)$  tại điểm có hoành độ bằng 2

Vì  $d' // d: y = x - 2$  nên  $d': y = x + b$

Tọa độ giao điểm của  $(d')$  và  $(P)$  là:  $-x^2 = x + b$  (2)

$(d')$  và  $(P)$  tại điểm có hoành độ bằng 2 suy ra  $b = -x^2 - x = -(2)^2 - 2 = -6$

Vậy phương trình đường thẳng  $(d')$  là  $y = x - 6$

### III. Một số bài toán trích từ đề thi của các tỉnh

**Bài toán 1.** (Đề thi tuyển sinh 10 năm học 2018-2019- Sở giáo dục và đào tạo Hà Nội)

Trong mặt phẳng tọa độ  $Oxy$ , cho đường thẳng  $(d): y = (m + 2)x + 3$  và Parabol  $(P): y = x^2$

- Chứng minh  $(d)$  luôn cắt  $(P)$  tại hai điểm phân biệt



- b. Tìm tất cả giá trị của  $m$  để  $(d)$  cắt  $(P)$  tại hai điểm phân biệt có các hoành độ là các số nguyên.

**Bài toán 2.** (Đề thi tuyển sinh 10 năm học 2018-2019- Thành phố Hồ Chí Minh)

Cho parabol  $(P): y = x^2$  và đường thẳng  $(d): y = 3x - 2$

- a. Vẽ  $(P)$  và  $(d)$  trên cùng hệ trục tọa độ  
b. Tìm tọa độ giao điểm của  $(P)$  và  $(d)$  bằng phép tính.

**Bài toán 3.** (Đề thi tuyển sinh 10 năm học 2018-2019- Kiên Giang)

- a. Vẽ đồ thị  $(P)$  của hàm số  $y = 2x^2$  trên trục tọa độ  $Oxy$   
b. Tìm các giá trị của tham số  $m$  để đường thẳng  $(d): y = (m^2 + m - 4)x + m - 7$  song song với đường thẳng  $(d): y = 2x - 5$

**Bài toán 4.** (Đề thi tuyển sinh 10 năm học 2018-2019)

- a. Trong mặt phẳng tọa độ  $Oxy$ , cho Parabol  $(P): y = x^2$ . Vẽ đồ thị Parabol  
b. Cho phương trình  $x^2 - (m - 1)x - m = 0$  (1) (với  $x$  là ẩn số,  $m$  là tham số). Xác định các giá trị của  $m$  để phương trình (1) có hai nghiệm  $x_1; x_2$  thỏa mãn điều kiện  $x_1(3 - x_2) + 20 \geq 3(3 - x_2)$

**Bài toán 5.** (Đề thi tuyển sinh 10 năm học 2018-2019- Thái Nguyên)

Cho hàm số bậc nhất  $y = mx + 1$  với  $m$  là tham số. Tìm  $m$  để đồ thị hàm số đi qua điểm  $A(1; 4)$ . Với giá trị  $m$  vừa tìm được, hàm số đồng biến hay nghịch biến trên  $\mathbb{R}$

**Bài toán 6.** (Đề thi tuyển sinh 10 Toán chuyên năm học 2018-2019- Bình Phước)

Cho Parabol  $(P): y = \frac{1}{2}x^2$  và đường thẳng  $(d): y = (m + 1)x - m^2 - \frac{1}{2}$  ( $m$  là tham số). Với giá trị nào của  $m$  thì đường thẳng  $(d)$  cắt Parabol  $(P)$  tại hai điểm  $A(x_1, x_1), B(x_2, y_2)$  sao cho biểu thức  $T = y_1 + y_2 - x_1x_2$  đạt giá trị nhỏ nhất.

**Bài toán 7.** (Đề thi tuyển sinh 10 năm học 2018-2019- An Giang)

Cho hàm số  $y = 0.5x^2$  có đồ thị là Parabol  $(P)$

- a. Vẽ đồ thị  $(P)$  của hàm số đã cho.



- b. Xác định hệ số  $a, b$  của đường thẳng  $(d): y = ax + b$ , biết  $(d)$  cắt trục hoành tại điểm có hoành độ bằng 1 và  $(d)$  cắt  $(P)$  tại điểm có hoành độ bằng 2. Chứng tỏ  $(P)$  và  $(d)$  tiếp xúc nhau.

**Bài toán 8.** (Đề thi tuyển sinh 10 chuyên Lê Quý Đôn năm học 2018-2019 Bà Rịa Vũng Tàu)

- a. Tìm tất cả giá trị của hệ số  $a$  để hàm số  $y = ax + 2$  đồng biến và đồ thị của hàm số đi qua điểm  $A(1; 3)$
- b. Cho đường thẳng  $(d): y = (3 - 2m)x - m^2$  và Parabol  $(P): y = x^2$ . Tìm tất cả giá trị của tham số  $m$  để  $(d)$  cắt  $(P)$  tại hai điểm phân biệt có hoành độ  $x_1, x_2$  và  $x_1(x_2 - 1) + 2(x_1 - x_2) = 2x_1 - x_2$