ĐỀ THI THAM KHẢO THPT QG 2020

Diễn đàn toán Casio[1]

Tóm tắt
Biên soạn lại đề thi tham khảo trung học phổ thông quốc gia của diễn đàn Toán Casio. Nếu có bất kì thắc mắc gì thì mong các bạn liên hệ vào các đường dẫn bên dưới để được hỗ trợ chi tiết nhé. Diễn đàn xin cám ơn

[1] *Chuyên trang chia sẻ tài liệu, kinh nghiệm ứng dụng giải toán trên máy tính cầm tay bao gồm: Giải toán SGK; Tuyển sinh 10; Luyện thi THPT QG và HSG MTCT.*
*__Website:__ `http://diendantoancasio.com`
*__Facebook:__ `https://www.facebook.com/DienDanToanCasio/`
*__Youtube:__ `https://www.youtube.com/channel/UCS8C4tPbCJDQWI7-DpoMwZg`
*__Hotline bán máy trợ giá:__ `0938525456`

Câu 1. (Đề MH 2020) Từ một nhóm học sinh gồm 6 nam và 8 nữ, có bao nhiêu cách chọn ra một học sinh?

A. 14 . B. 48 . C. 6 . D. 8 .

Hướng dẫn. Tổng số học sinh của nhóm là: $6+8=14$.
Chọn ra một học sinh, ta có: $C_{14}^{1}=14$ (cách). □

Hướng dẫn cách 2. Để chọn một học sinh, ta có: 6 cách chọn một học sinh nam và 8 cách chọn một học sinh nữ.
Vậy có: $6+8=14$ (cách). □

Câu 2. (Đề MH 2020) Cho cấp số nhân (u_n) với $u_1=2$ và $u_2=6$. Công bội của cấp số đã cho bằng

A. 3 . B. -4 . C. 4 . D. $\frac{1}{3}$.

Hướng dẫn. Trong một cấp số nhân, ta có: $u_2=u_1.q \Rightarrow q=\frac{u_2}{u_1}=\frac{6}{2}=3$. □

Câu 3. (Đề MH 2020) Diện tích xung quanh của hình nón có độ dài đường sinh l và bán kính đáy r bằng

A. $4\pi rl$. B. $2\pi rl$. C. πrl . D. $\frac{1}{3}\pi rl$.

Hướng dẫn. Diện tích xung quanh của hình nón có độ dài đường sinh l và bán kính đáy r là:
$S_{xq}=\pi rl$. □

Câu 4. (Đề MH 2020) Cho hàm số $f(x)$ có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	
y	$-\infty$	$\nearrow$	2	$\searrow$	1	$\nearrow$	2	$\searrow$	$-\infty$

Hàm số đã cho đồng biến trên khoảng nào dưới đây?

A. $(1;+\infty)$. B. $(-1;0)$. C. $(-1;1)$. D. $(0;1)$.

Hướng dẫn. Dựa vào bảng biến thiên hàm số đã cho đồng biến trên khoảng $(-\infty;-1)$ và $(0;1)$. □

Câu 5. (Đề MH 2020) Cho khối lập phương có cạnh bằng 6 . Thể tích khối lập phương đã cho bằng

A. 216 . B. 18 . C. 36 . D. 72 .

Hướng dẫn. Ta có thể tích khối lập phương đã cho bằng: $6^3 = 216$. □

Câu 6. (Đề MH 2020) Nghiệm của phương trình $\log_3(2x-1) = 2$ là

A. $x = 3$. B. $x = 5$. C. $x = \frac{9}{2}$. D. $x = \frac{7}{2}$.

Hướng dẫn. $\log_3(2x-1) = 2 \Leftrightarrow \begin{cases} x > \frac{1}{2} \\ 2x-1 = 9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > \frac{1}{2} \\ x = 5 \ (TM) \end{cases}$.

Vậy nghiệm của phương trình là $x = 5$. □

Câu 7. (Đề MH 2020) Nếu $\int_1^2 f(x)\,\mathrm{d}x = -2$ và $\int_2^3 f(x)\,\mathrm{d}x = 1$ thì $\int_1^3 f(x)\,\mathrm{d}x$ bằng

A. -3 . B. -1 . C. 1 . D. 3 .

Hướng dẫn. Ta có $\int_1^3 f(x)\,\mathrm{d}x = \int_1^2 f(x)\,\mathrm{d}x + \int_2^3 f(x)\,\mathrm{d}x = -2+1 = -1$. □

Câu 8. (Đề MH 2020) Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau

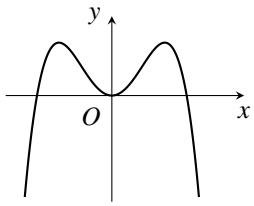
x	$-\infty$		0		3		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	$\nearrow$	2	$\searrow$	-4	$\nearrow$	$+\infty$

Giá trị cực tiểu của hàm số đã cho bằng

A. 2 . B. 3 . C. 0 . D. -4 .

Hướng dẫn. Từ bảng biến thiên ta thấy giá trị cực tiểu của hàm số bằng -4 . □

Câu 9. (Đề MH 2020) Đồ thị của hàm số nào sau đây có dạng như hình cong trong hình bên?



A. $y=-x^4+2x^2$.
B. $y=x^4-2x^2$.
C. $y=x^3-3x^2$.
D. $y=-x^3+3x^2$.

Hướng dẫn. Dựa vào hình dạng của đồ thị đã cho trong hình vẽ, ta thấy đó là hình dạng đồ thị của hàm số $y=ax^4+bx^2+c\ (a\neq 0)$ với hệ số $a<0$.
Trong bốn hàm số đã cho chỉ có hàm số $y=-x^4+2x^2$ thỏa mãn. □

Câu 10. (Đề MH 2020) Với a là số thực dương tùy ý, $\log_2\left(a^2\right)$ bằng

A. $2+\log_2 a$.
B. $\frac{1}{2}+\log_2 a$.
C. $2\log_2 a$.
D. $\frac{1}{2}\log_2 a$.

Hướng dẫn. Với a là số thực dương tùy ý, ta có $\log_2\left(a^2\right)=2\log_2 a$. □

Câu 11. (Đề MH 2020) Họ tất cả các nguyên hàm của hàm số $f(x)=\cos x+6x$ là

A. $\sin x+3x^2+C$.
B. $-\sin x+3x^2+C$.
C. $\sin x+6x^2+C$.
D. $-\sin x+C$.

Hướng dẫn. Ta có $\int(\cos x+6x)\,\mathrm{d}x=\sin x+3x^2+C$. □

Câu 12. (Đề MH 2020) Môđun của số phức $1+2i$ bằng

A. 5 .
B. $\sqrt{3}$.
C. $\sqrt{5}$.
D. 3 .

Hướng dẫn. Ta có: $|1+2i|=\sqrt{1^2+2^2}=\sqrt{5}$.
Vậy môđun của số phức $1+2i$ bằng $\sqrt{5}$. □

Câu 13. (Đề MH 2020) Trong không gian $Oxyz$, hình chiếu của điểm $M(2;-2;1)$ trên mặt phẳng (Oxy) có tọa độ là

A. $(2;0;1)$.
B. $(2;-2;0)$.
C. $(0;-2;1)$.
D. $(0;0;1)$.

Hướng dẫn. Ta có hình chiếu của điểm $M(x_o;y_o;z_o)$ trên mặt phẳng (Oxy) là điểm $M'(x_o;y_o;0)$.
Do đó hình chiếu của điểm $M(2;-2;1)$ trên mặt phẳng (Oxy) là điểm $M'(2;-2;0)$. □

Câu 14. (Đề MH 2020) Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S):(x-1)^2+(y+2)^2+(z-3)^2=16$. Tâm của (S) có tọa độ là

A. $(-1;-2;-3)$.
B. $(1;2;3)$.
C. $(-1;2;-3)$.
D. $(1;-2;3)$.

Hướng dẫn. Từ phương trình của mặt cầu (S) , suy ra tâm của mặt cầu (S) có tọa độ là $(1;-2;3)$. □

Câu 15. (Đề MH 2020) Trong không gian $Oxyz$, cho mặt phẳng $(\alpha):3x+2y-4z+1=0$. Vectơ nào dưới đây là một vectơ pháp tuyến của (α)?

A. $\overrightarrow{n_2}=(3;2;4)$.
B. $\overrightarrow{n_3}=(2;-4;1)$.
C. $\overrightarrow{n_1}=(3;-4;1)$.
D. $\overrightarrow{n_4}=(3;2;-4)$.

Hướng dẫn. Mặt phẳng $(\alpha):\ 3x+2y-4z+1=0$ có một vectơ pháp tuyến là $\overrightarrow{n_4}(3;2;-4)$. □

Câu 16. (Đề MH 2020) Trong không gian $Oxyz$, điểm nào dưới đây thuộc đường thẳng d: $\frac{x+1}{-1}=\frac{y-2}{3}=\frac{z-1}{3}$?

A. $P(-1;2;1)$. B. $Q(1;-2;-1)$. C. $N(-1;3;2)$. D. $M(1;2;1)$.

Hướng dẫn. Vì phương trình chính tắc của đường thẳng đi qua $P(x_o;y_o;z_0)$ và có vectơ chỉ phương $\overrightarrow{u}(a;b;c)$ là $\frac{x-x_o}{a}=\frac{y-y_o}{b}=\frac{z-z_o}{c}$ nên dễ dàng thấy điểm $P(-1;2;1)$ thuộc đường thẳng d . □

Hướng dẫn cách 2. Thay tọa độ 4 điểm M , N , P , Q vào phương trình đường thẳng d ta thấy điểm P thỏa mãn. □

Câu 17. (Đề MH 2020) Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh $\sqrt{3}a$, SA vuông góc với mặt phẳng đáy và $SA=\sqrt{2}a$. Góc giữa đường thẳng SC và mặt phẳng $(ABCD)$ bằng

A. 45° . B. 30° . C. 60° . D. 90° .

Hướng dẫn. Ta có: $SA\perp(ABCD)$ nên AC là hình chiếu vuông góc của SC lên mặt phẳng $(ABCD)$.
Do đó, góc giữa đường thẳng SC và mặt phẳng $(ABCD)$ là góc $\widehat{SCA}$.
Xét ΔSCA vuông tại A: $\tan\widehat{SCA}=\frac{SA}{AC}=\frac{\sqrt{2}a}{\sqrt{3}a.\sqrt{2}}=\frac{1}{\sqrt{3}}\Rightarrow\widehat{SCA}=30^\circ$. □

Câu 18. (Đề MH 2020) Cho hàm số $f(x)$, bảng xét dấu của $f'(x)$ như sau

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$-$	0	$+$	

Số điểm cực trị của hàm số đã cho là

A. 0 . B. 2 . C. 1 . D. 3 .

Hướng dẫn. Từ bảng xét dấu của $f'(x)$ ta thấy $f'(x)$ đổi dấu 2 lần tại $x=-1$ và $x=1$.
Vậy số điểm cực trị của hàm số đã cho là 2 . □

Câu 19. (Đề MH 2020) Giá trị lớn nhất của hàm số $f(x)=-x^4+12x^2+1$ trên đoạn $[-1;2]$ bằng

A. 1 . B. 37 . C. 33 . D. 12 .

Hướng dẫn. Hàm số $f(x)$ liên tục trên đoạn $[-1;2]$.
$f'(x)=-4x^3+24x=4x\left(-x^2+6\right)$

$$f'(x)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\in(-1;2)\\x=-\sqrt{6}\notin(-1;2)\\x=\sqrt{6}\notin(-1;2)\end{array}\right.$$

$f(-1)=12$; $f(2)=33$; $f(0)=1$.
Vậy $\underset{[-1;2]}{\text{Max}}\, f(x)=33$. □

Câu 20. (Đề MH 2020) Xét tất cả các số thực dương a và b thỏa mãn $\log_2 a=\log_8(ab)$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. $a=b^2$. B. $a^3=b$. C. $a=b$. D. $a^2=b$.

Hướng dẫn. $\log_2 a = \log_8 (ab) \Leftrightarrow \log_2 a = \log_{2^3} (ab) \Leftrightarrow \log_2 a = \dfrac{1}{3}\log_2 (ab) \Leftrightarrow 3\log_2 a = \log_2 (ab)$
$\Leftrightarrow \log_2 a^3 = \log_2 (ab) \Leftrightarrow a^3 = ab \Leftrightarrow a^2 = b$. □

Câu 21. (Đề MH 2020) Tập nghiệm của bất phương trình $5^{x-1} \geq 5^{x^2-x-9}$ là

A. $[-2;4]$.
B. $[-4;2]$.
C. $(-\infty;-2]\cup[4;+\infty)$.
D. $(-\infty;-4]\cup[2;+\infty)$.

Hướng dẫn. $5^{x-1} \geq 5^{x^2-x-9} \Leftrightarrow x-1 \geq x^2-x-9 \Leftrightarrow x^2-2x-8 \leq 0 \Leftrightarrow -2 \leq x \leq 4$.
Vậy tập nghiệm của bất phương trình đã cho là $[-2;4]$.

□

Câu 22. (Đề MH 2020) Cho hình trụ có bán kính đáy bằng 3 . Biết rằng khi cắt hình trụ đã cho bởi một mặt phẳng qua trục, thiết diện thu được là một hình vuông. Diện tích xung quanh của hình trụ đã cho bằng

A. 18π .
B. 36π .
C. 54π .
D. 27π .

Hướng dẫn. Theo giả thiết mặt phẳng đi qua trục OO' cắt hình trụ theo thiết diện một hình vuông.
Do đó: $AD = AB = 2R = 6$.
Hình trụ đã cho có $R = 3$, chiều cao $h = 6$, do đó có diện tích xung quanh là:
$S_{xq} = 2\pi.R.h = 36\pi$ (đvdt). □

Câu 23. (Đề MH 2020) Cho hàm số $f(x)$ có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$		2		3		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	$\nearrow$	1	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

Số nghiệm thực của phương trình $3f(x) - 2 = 0$ là

A. 2 .
B. 0 .
C. 3 .
D. 1 .

Hướng dẫn. Phương trình $3f(x) - 2 = 0 \Leftrightarrow f(x) = \dfrac{2}{3}$.

Nhận xét: Số nghiệm của phương trình chính là số giao điểm của đường thẳng $y = \dfrac{2}{3}$ và đồ thị hàm số $y = f(x)$.

Dựa vào bảng biến thiên ta thấy đường thẳng $y = \dfrac{2}{3}$ cắt đồ thị hàm số $y = f(x)$ tại 3 điểm phân biệt nên phương trình $f(x) = \dfrac{2}{3}$ có 3 nghiệm.

Vậy phương trình $3f(x) - 2 = 0$ có 3 nghiệm thực phân biệt. □

Câu 24. (Đề MH 2020) Họ tất cả các nguyên hàm của hàm số $f(x)=\dfrac{x+2}{x-1}$ trên khoảng $(1;+\infty)$ là

A. $x+3\ln(x-1)+C$.
B. $x-3\ln(x-1)+C$.
C. $x-\dfrac{3}{(x-1)^2}+C$.
D. $x-\dfrac{3}{(x-1)^2}+C$.

Hướng dẫn. Ta có:

$$\begin{cases} F(x)=\int f(x)\,\mathrm{d}x=\int \dfrac{x+2}{x-1}\mathrm{d}x=\int \dfrac{x-1+3}{x-1}\mathrm{d}x=\int\left(1+\dfrac{3}{x-1}\right)\mathrm{d}x \\ =x+3\ln|x-1|+C \xrightarrow{x\in(1;+\infty)} F(x)=x+3\ln(x-1)+C. \end{cases}$$

Vậy $F(x)=x+3\ln(x-1)+C$.

□

Câu 25. (Đề MH 2020) Để dự báo dân số của một quốc gia, người ta sử dụng công thức $S=Ae^{nr}$; trong đó A là dân số của năm lấy làm mốc tính, S là dân số sau n năm, r là tỉ lệ tăng dân số hàng năm. Năm 2017 , dân số Việt Nam là 93.671.600 người (Tổng cục Thống kê, Niên giám Thống kê năm 2017 , Nhà xuất bản Thống kê, Tr. 79). Giả sử tỉ lệ tăng dân số hàng năm không đổi là $0,81\%$ dự báo dân số Việt Nam năm 2035 là bao nhiêu người (kết quả làm tròn đến chữ số hàng trăm)?

A. 109.256.100 .
B. 108.374.700 .
C. 107.500.500 .
D. 108.311.100 .

Hướng dẫn. Ta có: $S=Ae^{nr}=93671600.e^{(2035-2017).\dfrac{0,81}{100}}=108.374.741,3\approx 108.374.700$.
Vậy cứ tăng dân số với tỉ lệ như vậy thì đến năm 2035 dân số nước ta khoảng 108.374.700 người. □

Câu 26. (Đề MH 2020) Cho hình lăng trụ đứng $ABCD.A'B'C'D'$ có đáy là hình thoi cạnh a , $BD=a\sqrt{3}$, $AA'=4a$. Thể tích của khối lăng trụ đã cho bằng

A. $2\sqrt{3}a^3$.
B. $4\sqrt{3}a^3$.
C. $\dfrac{2\sqrt{3}a^3}{3}$.
D. $\dfrac{4\sqrt{3}a^3}{3}$.

Hướng dẫn. Áp dụng định lí hàm số cosin cho tam giác ta có:

$$\cos\widehat{BAD}=\frac{AB^2+AD^2-BD^2}{2AB.AD}=\frac{-1}{2}\Rightarrow \widehat{BAD}=120^o$$

$\Rightarrow S_{ABCD}=AB.AD.\sin\widehat{BAD}=\dfrac{a^2\sqrt{3}}{2}$

$\Rightarrow V_{ABCD.A'B'C'D'}=AA'.S_{ABCD}=4a.\dfrac{a^2\sqrt{3}}{2}=2\sqrt{3}a^3$. □

Câu 27. (Đề MH 2020) Tổng số tiệm cận đứng và tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y=\dfrac{5x^2-4x-1}{x^2-1}$ là

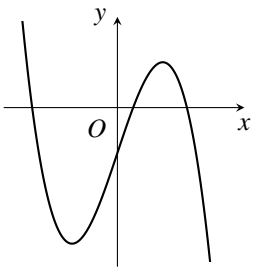
A. 1 .
B. 0 .
C. 2 .
D. 3 .

Hướng dẫn. Tập xác định $D = \mathbb{R} \setminus \{-1; 1\}$
Trên D ta có,

$$y = \frac{5x^2 - 4x - 1}{x^2 - 1} = \frac{(5x+1)(x-1)}{(x-1)(x+1)} = \frac{5x+1}{x+1}$$

$\lim\limits_{x \to (-1)^+} y = \lim\limits_{x \to (-1)^+} \dfrac{5x+1}{x+1} = -\infty \Rightarrow x = -1$ là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số.
$\lim\limits_{x \to \pm\infty} y = \lim\limits_{x \to \pm\infty} \dfrac{5x+1}{x+1} = 5 \Rightarrow y = 5$ là tiệm cận ngang của đồ thị hàm số.
Vậy đồ thị hàm số đã cho có 2 tiệm cận. □

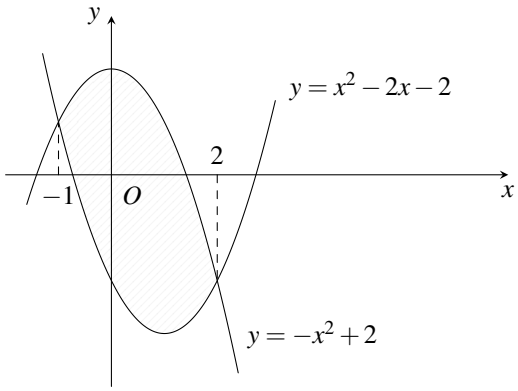
Câu 28. (Đề MH 2020) Cho hàm số $y = ax^3 + 3x + d$ $(a, d \in \mathbb{R})$ có đồ thị như hình bên. Mệnh đề nào dưới đây đúng?



A. $a > 0; d > 0$.
B. $a < 0; d > 0$.
C. $a > 0; d < 0$.
D. $a < 0; d < 0$.

Hướng dẫn. Do $\lim\limits_{x \to +\infty} y = \lim\limits_{x \to +\infty} \left(ax^3 + 3x + d\right) = -\infty \Rightarrow a < 0$.
Vì giao điểm của ĐTHS $y = ax^3 + 3x + d$ với trục tung $Oy : x = 0$ nằm phía dưới trục hoành $Ox : y = 0$ nên $d < 0$.
Suy ra: $\begin{cases} a < 0 \\ d < 0 \end{cases}$. □

Câu 29. (Đề MH 2020) Diện tích phần hình phẳng được gạch chéo trong bình bên bằng



A. $\displaystyle\int_{-1}^{2} \left(-2x^2 + 2x + 4\right) \mathrm{d}x$.

B. $\displaystyle\int_{-1}^{2} \left(2x^2 - 2x - 4\right) \mathrm{d}x$.

C. $\displaystyle\int_{-1}^{2} \left(-2x^2 - 2x + 4\right) \mathrm{d}x$.

D. $\displaystyle\int_{-1}^{2} \left(2x^2 + 2x - 4\right) \mathrm{d}x$.

Hướng dẫn. Từ đồ thị ta thấy: Ứng với phần hình phẳng được gạch chéo trong hình bên thì đồ thị hai hàm số $y = -x^2 + 2$ (C_1) và đồ thị hàm số $y = x^2 - 2x - 2$ (C_2) cắt nhau tại hai điểm có hoành độ là $x = -1$ và $x = 2$, đồng thời đồ thị (C_1) nằm trên đồ thị (C_2) nên ta được phần diện tích hình phẳng gạch chéo là:

$$S = \int_{-1}^{2} \left[-x^2 + 2 - \left(x^2 - 2x - 2\right)\right] \mathrm{d}x = \int_{-1}^{2} \left(-2x^2 + 2x + 4\right) \mathrm{d}x$$

□

Câu 30. (Đề MH 2020) Cho hai số phức $z_1 = -3+i$ và $z_2 = 1-i$. Phần ảo của số phức $z_1+\overline{z}_2$ bằng

A. -2 . B. $2i$. C. 2 . D. $-2i$.

Hướng dẫn. Ta có $z_1+\overline{z}_2 = (-3+i)+(1+i) = -2+2i$
Phần ảo của số phức $z_1+\overline{z}_2$ bằng 2 . □

Câu 31. (Đề MH 2020) Trong mặt phẳng tọa độ, điểm biểu diễn số phức $z = (1+2i)^2$ là điểm nào dưới đây?

A. $P(-3;4)$. B. $Q(5;4)$. C. $N(4;-3)$. D. $M(4;5)$.

Hướng dẫn. Ta có $z = (1+2i)^2 = -3+4i$ có điểm biểu diễn là $P(-3;4)$. □

Câu 32. (Đề MH 2020) Trong không gian $Oxyz$, cho các vectơ $\overrightarrow{a} = (1;0;3)$ và $\overrightarrow{b} = (-2;2;5)$. Tích vô hướng $\overrightarrow{a}\cdot\left(\overrightarrow{a}+\overrightarrow{b}\right)$ bằng

A. 25 . B. 23 . C. 27 . D. 29 .

Hướng dẫn. Ta có $\overrightarrow{a}+\overrightarrow{b} = (-1;2;8)$.
Suy ra $\overrightarrow{a}.\left(\overrightarrow{a}+\overrightarrow{b}\right) = 1.(-1)+0.2+3.8 = 23.$ □

Câu 33. (Đề MH 2020) Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu (S) có tâm là điểm $I(0;0;-3)$ và đi qua điểm $M(4;0;0)$. Phương trình của (S) là

A. $x^2+y^2+(z+3)^2 = 25$. B. $x^2+y^2+(z+3)^2 = 5$.
C. $x^2+y^2+(z-3)^2 = 25$. D. $x^2+y^2+(z-3)^2 = 5$.

Hướng dẫn. Ta có: $IM = 5$.
Mặt cầu (S) có tâm $I(0;0;-3)$ đi qua điểm $M(4;0;0)$ có bán kính là $R = IM = 5$
Vậy phương trình mặt cầu (S) là $x^2+y^2+(z+3)^2 = 25$. □

Câu 34. (Đề MH 2020) Trong không gian $Oxyz$, mặt phẳng đi qua điểm $M(1;1-1)$ và vuông góc với đường thẳng Δ: $\dfrac{x+1}{2} = \dfrac{y-2}{2} = \dfrac{z-1}{1}$ có phương trình là

A. $2x+2y+z+3 = 0$. B. $x-2y-z = 0$.
C. $2x+2y+z-3 = 0$. D. $x-2y-z-2 = 0$.

Hướng dẫn. Gọi (α) là mặt phẳng cần tìm.
Vì (α) vuông góc với đường thẳng $\Delta : \dfrac{x+1}{2} = \dfrac{y-2}{2} = \dfrac{z-1}{1}$ nên (α) nhận véc tơ chỉ phương $\overrightarrow{u}(2;2;1)$ của Δ là véc tơ pháp tuyến.
Lại có, (α) đi qua $M(1;1-1)$.
Do đó, phương trình (α) có dạng:
$2(x-1)+2(y-1)+(z+1) = 0 \Leftrightarrow 2x+2y+z-3 = 0$ □

Câu 35. (Đề MH 2020) Trong không gian $Oxyz$, vectơ nào dưới đây là một vectơ chỉ phương của đường thẳng đi qua hai điểm $M(2;3;-1)$ và $N(4;5;3)$?

A. $\overrightarrow{u_4}(1;1;1)$. B. $\overrightarrow{u_3}(1;1;2)$. C. $\overrightarrow{u_1}(3;4;1)$. D. $\overrightarrow{u_2}(3;4;2)$.

Hướng dẫn. Ta có: $\overrightarrow{MN}(2;2;4) = 2(1;1;2) \Rightarrow \overrightarrow{u_3}(1;1;2)$ là một véc tơ chỉ phương của đường thẳng đi qua hai điểm $M(2;3;-1)$ và $N(4;5;3)$. □

Câu 36. (Đề MH 2020) Chọn ngẫu nhiên một số từ tập các số tự nhiên có ba chữ số đôi một khác nhau. Xác suất để số được chọn có tổng các chữ số là chẵn bằng

A. $\frac{41}{81}$. B. $\frac{4}{9}$. C. $\frac{1}{2}$. D. $\frac{16}{81}$.

Hướng dẫn. Không gian mẫu: $n(\Omega) = A_{10}^3 - A_9^2 = 648$

Gọi A là biến cố "Số được chọn có tổng các chữ số là chẵn."; $\overline{abc}$ là số cần thành lập thỏa tổng ba chữ số là số chẵn.

TH1: Ba chữ số chẵn chọn từ $\{0;2;4;6;8\}$: $A_5^3 - A_4^2 = 48$ (số).

TH2: Chọn chữ số 0 và 2 chữ số lẻ từ $\{1;3;5;7;9\}$

Xếp số 0 : 2 cách

Hai vị trí còn lại: A_5^2 cách

Suy ra có 40 số.

TH3: Chọn 1 chữ số chẵn từ $\{2;4;6;8\}$ và 2 chữ số lẻ từ $\{1;3;5;7;9\}$

Chọn một chữ số chẵn: 4 cách

Xếp chữ số chẵn vừa chọn: 3 cách

Hai vị trí còn lại: A_5^2 cách

Suy ra có 240 số.

Vậy $n(A) = 328$

Suy ra xác suất: $P(A) = \frac{n(A)}{n(\Omega)} = \frac{328}{648} = \frac{41}{81}$.

□

Câu 37. (Đề MH 2020) Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình thang, $AB = 2a$, $AD = DC = CB = a$, SA vuông góc với mặt phẳng đáy và $SA = 3a$. Gọi M là trung điểm của AB . Khoảng cách giữa hai đường thẳng SB và DM bằng

A. $\frac{3a}{4}$. B. $\frac{3a}{2}$. C. $\frac{3\sqrt{13}a}{13}$. D. $\frac{6\sqrt{13}a}{13}$.

Hướng dẫn. Ta có $DC//MB$ và $DC = BC = MB = a$ suy ra tứ giác $DMBC$ là hình thoi $\Rightarrow DM//BC$, lại có $BC \subset (SBC)$ và $DM \not\subset (SBC)$, do đó: $DM//(SBC)$

$\Rightarrow d(SB, DM) = d(M, (SBC))$.

Vì M là trung điểm của AB nên

$$d(M, (SBC)) = \frac{1}{2}d(A, (SBC)).$$

Từ giả thiết ta được $\widehat{ADC} = 120^\circ$.

Áp dụng định lí Côsin vào tam giác ADC ta được:

$$AC^2 = AD^2 + DC^2 - 2AD.DC.\cos\widehat{ADC} \Rightarrow AC^2 = a^2 + a^2 - 2a^2.cos120^\circ = 3a^2$$
$$\Rightarrow AC = a\sqrt{3}$$

Ta nhận thấy $AB^2 = AC^2 + BC^2$ do đó ΔACB vuông tại C

$$\Rightarrow AC \perp BC \tag{1}$$

mà

$$SA \perp (ABCD) \Rightarrow SA \perp BC \tag{2}$$

Từ (1) và (2) ta được: $BC \perp (SAC) \Rightarrow (SAC) \perp (SBC)$.
Trong tam giác SAC dựng AH vuông góc với AC , mà $AC = (SAC) \cap (SBC)$
do đó:

$$AH \perp (SBC) \Rightarrow d(A, (SBC)) = AH$$

Tam giác SAC vuông tại A và có AH là đường cao nên

$$AH = \frac{SA.AC}{\sqrt{SA^2 + AC^2}} \Rightarrow AH = \frac{3a.a\sqrt{3}}{\sqrt{9a^2 + 3a^2}} = \frac{3a}{2}$$
$$\Rightarrow d(A, (SBC)) = \frac{3a}{2}$$

Vậy $d(M, (SBC)) = \frac{1}{2} d(A, (SBC)) = \frac{3a}{4}$.

□

Câu 38. (Đề MH 2020) Cho hàm số $f(x)$ có $f(3) = 3$ và

$$f'(x) = \frac{x}{x + 1 - \sqrt{x+1}}, \forall x > 0$$

Khi đó $\int_3^8 f(x)\,dx$ bằng

A. 7 . B. $\frac{197}{6}$. C. $\frac{29}{2}$. D. $\frac{181}{6}$.

Hướng dẫn. Ta có

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{x}{x + 1 - \sqrt{x+1}} \\ &= \frac{x}{\sqrt{x+1}\left(\sqrt{x+1} - 1\right)} \\ &= \frac{x\left(\sqrt{x+1} + 1\right)}{\sqrt{x+1}\left(\sqrt{x+1} - 1\right)\left(\sqrt{x+1} + 1\right)} \\ &= \frac{\sqrt{x+1} + 1}{\sqrt{x+1}} \\ &= 1 + \frac{1}{\sqrt{x+1}} \end{aligned}$$

$\Rightarrow f(x) = \int \left(1 + \frac{1}{\sqrt{x+1}}\right) \mathrm{d}x = x + 2\sqrt{x+1} + C$

Mà $f(3) = 3 \Rightarrow C = -4$

Vậy $\int\limits_3^8 f(x)\,\mathrm{d}x = \int\limits_3^8 \left(x + 2\sqrt{x+1} - 4\right) \mathrm{d}x = \frac{197}{6}$ □

Câu 39. (Đề MH 2020) Cho hàm số $f(x) = \frac{mx-4}{x-m}$ (m là tham số thực). Có bao nhiêu giá trị nguyên của m để hàm số đồng biến trên khoảng $(0;+\infty)$?

A. 5 . B. 4 . C. 3 . D. 2 .

Hướng dẫn. Ta có $f'(x) = \frac{-m^2+4}{(x-m)^2}$

Hàm số đồng biến trên khoảng $(0;+\infty) \Leftrightarrow \frac{-m^2+4}{(x-m)^2} > 0\ \forall x \in (0;+\infty)$

$\Rightarrow \begin{cases} -m^2+4 > 0 \\ x \neq m\ \ \forall x \in (0;+\infty) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \in (-2;2) \\ m \in (-\infty;0] \end{cases} \Leftrightarrow m \in (-2;0]$

Vậy có hai giá trị nguyên của m là -1 và 0 . □

Câu 40. (Đề MH 2020) Cho hình nón có chiều cao bằng $2\sqrt{5}$. Một mặt phẳng đi qua đỉnh hình nón và cắt hình nón theo một thiết diện là tam giác đều có diện tích bằng $9\sqrt{3}$. Thể tích của khối nón giới hạn bởi hình nón đã cho bằng

A. $\frac{32\sqrt{5}\pi}{3}$. B. 32π . C. $32\sqrt{5}\pi$. D. 96π .

Hướng dẫn. ΔABC đều, đặt $AB = BC = CA = x$.

Ta có: $S_{\Delta ABC} = 9\sqrt{3} \Leftrightarrow \frac{x^2\sqrt{3}}{4} = 9\sqrt{3} \Leftrightarrow x = 6$.

$AI = \frac{6.\sqrt{3}}{2} = 3\sqrt{3}$ (ΔABC đều).

ΔAOI vuông tại O : $OI = \sqrt{AI^2 - AO^2} = \sqrt{7}$.

ΔOIB vuông tại I : $R = OB = \sqrt{OI^2 + BI^2} = 4$.

Vậy thể tích khối nón: $V = \frac{1}{3}.\pi R^2.h = \frac{1}{3}\pi.16.2\sqrt{5} = \frac{32\pi\sqrt{5}}{3}$ □

Câu 41. (Đề MH 2020) Cho x, y là các số thực dương thỏa mãn $\log_9 x = \log_6 y = \log_4(2x+y)$. Giá trị của $\frac{x}{y}$ bằng

A. 2 . B. $\frac{1}{2}$. C. $\log_2\left(\frac{3}{2}\right)$. D. $\log_{\frac{3}{2}} 2$.

Hướng dẫn. Đặt $\log_9 x = \log_6 y = \log_4(2x+y) = t \Rightarrow \begin{cases} x = 9^t \\ y = 6^t \\ 2x + y = 4^t \end{cases}$

Khi đó ta có: $\frac{x}{y} = \frac{9^t}{6^t} = \left(\frac{3}{2}\right)^t$ và $2.9^t + 6^t = 4^t$ (1).

Ta có $(1) \Leftrightarrow 2\left(\frac{3}{2}\right)^{2t} + \left(\frac{3}{2}\right)^{t} - 1 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \left(\frac{3}{2}\right)^{t} = -1 \ \ (loai) \\ \left(\frac{3}{2}\right)^{t} = \frac{1}{2} \ \ (t/man) \end{array}\right.$

Vậy $\frac{x}{y} = \left(\frac{3}{2}\right)^{t} = \frac{1}{2}$. □

Câu 42. (Đề MH 2020) Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho giá trị lớn nhất của hàm số $f(x) = \left|x^3 - 3x + m\right|$ trên đoạn $[0;3]$ bằng 16 . Tổng tất cả các phần tử của S bằng

A. -16 . B. 16 . C. -12 . D. -2 .

Hướng dẫn. Xét hàm số $g(x) = x^3 - 3x + m$ trên $\mathbb{R}$.

$$g'(x) = 3x^2 - 3;\ g'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \pm 1.$$

Bảng biến thiên của hàm số $g(x)$

Ta xét các trường hợp sau:

+) $m + 18 \le 0 \Leftrightarrow m \le -18$. Khi đó $m - 2 < m < m + 18 \le 0$, nên

$$\underset{[0;3]}{Max}\, y = \underset{[0;3]}{Max}\ \{|m-2|, |m|, |m+18|\} = |m-2| = 2 - m$$

Vậy $\underset{[0;3]}{Max}\, y = 16 \Leftrightarrow 2 - m = 16 \Leftrightarrow m = -14$ (loại).

+) $m < 0 < m + 18 \Leftrightarrow -18 < m < 0$. Khi đó $m - 2 < m < 0 < m + 18$, nên

$$\begin{aligned} \underset{[0;3]}{Max}\, y &= \underset{[0;3]}{Max}\ \{|m-2|, |m|, |m+18|\} \\ &= \underset{[0;3]}{Max}\ \{2-m, -m, m+18\} \\ &= \underset{[0;3]}{Max}\ \{2-m, m+18\} = \begin{cases} 2-m, -18 < m < -8 \\ m+18, 0 > m \ge -8 \end{cases} \end{aligned}$$

Vậy $\underset{[0;3]}{Max}\, y = 16 \Leftrightarrow \begin{cases} 2-m = 16, -18 < m < -8 \\ m+18 = 16, -8 \le m < 0 \end{cases}$. Như vậy $\left[\begin{array}{l} m = -14 \\ m = -2 \end{array}\right.$

+) $m = 0 : \underset{[0;3]}{Max}\, y = 18 \ne 16$ (loại).

+) $m - 2 < 0 < m < m + 18$

Ta có

$$\underset{[0;3]}{Max}\, y = \underset{[0;3]}{Max}\ \{|m-2|, |m|, |m+18|\} = \underset{[0;3]}{Max}\ \{2-m, m, m+18\} = m + 18,$$

Do đó $\underset{[0;3]}{Max}\, y = 16 \Leftrightarrow m + 18 = 16 \Leftrightarrow m = -2$ (thỏa mãn).

+) $0 \le m - 2 < m < m + 18$.

Ta có

$$\underset{[0;3]}{Max}\, y = \underset{[0;3]}{Max}\ \{|m-2|, |m|, |m+18|\} = \underset{[0;3]}{Max}\ \{m-2, m, m+18\} = m + 18$$

Do đó $\underset{[0;3]}{Max}\, y = 16 \Leftrightarrow m + 18 = 16 \Leftrightarrow m = -2$ (loại).

Suy ra $S = \{-14; -2\}$. Vậy tổng các phần tử của S bằng $-14 + (-2) = -16$. □

Câu 43. (Đề MH 2020) Cho phương trình $\log_2^2(2x)-(m+2)\log_2 x+m-2=0$ (m là tham số thực). Tập hợp tất cả các giá trị của m để phương trình đã cho có hai nghiệm phân biệt thuộc đoạn $[1;2]$ là

A. $(1;2)$. B. $[1;2]$. C. $[1;2)$. D. $[2;+\infty)$.

Hướng dẫn. Điều kiện xác định: $x>0$.

Ta có

$$\begin{aligned}\log_2^2(2x)-(m+2)\log_2 x+m-2=0 &\Leftrightarrow (\log_2 x+1)^2-m\log_2 x-2\log_2 x+m-2=0\\ &\Leftrightarrow \log_2^2 x-1-m\log_2 x+m=0\\ &\Leftrightarrow (\log_2 x-1)(\log_2 x+1)-m(\log_2 x-1)=0\\ &\Leftrightarrow (\log_2 x-1)(\log_2 x+1-m)=0\\ &\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\log_2 x=1\\ \log_2 x=m-1\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=2\in[1;2]\\ x=2^{m-1}\end{array}\right.\end{aligned}$$

Phương trình đã cho có hai nghiệm phân biệt thuộc đoạn $[1;2]$ khi và chỉ khi $\begin{cases}1\le 2^{m-1}\le 2\\ 2^{m-1}\ne 2\end{cases}$

$\Leftrightarrow 1\le 2^{m-1}<2 \Leftrightarrow 0\le m-1<1 \Leftrightarrow 1\le m<2$ hay $m\in[1;2)$. □

Câu 44. (Đề MH 2020) Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$. Biết $\cos 2x$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)e^x$, họ tất cả các nguyên hàm của hàm số $f'(x)e^x$ là

A. $-\sin 2x+\cos 2x+C$. B. $-2\sin 2x+\cos 2x+C$.

C. $-2\sin 2x-\cos 2x+C$. D. $2\sin 2x-\cos 2x+C$.

Hướng dẫn. Vì $cos2x$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)e^x$ nên $f(x)e^x=(\cos 2x)'=-2\sin 2x$.

Ta có $\int f'(x)e^x\,\mathrm{d}x=\int e^x d(f(x))=f(x)e^x-\int f(x)d(e^x)=f(x)e^x-\int f(x)e^x\,\mathrm{d}x$.

Mà $f(x)e^x=-2\sin 2x$ do đó $\int f'(x)e^x\,\mathrm{d}x=-2\sin 2x+\int 2\sin 2x\,\mathrm{d}x$.

Vậy $\int f'(x)e^x\,\mathrm{d}x=-2\sin 2x-cos2x+C$. □

Câu 45. (Đề MH 2020) Cho hàm số $f(x)$ có bảng biến thiên như sau

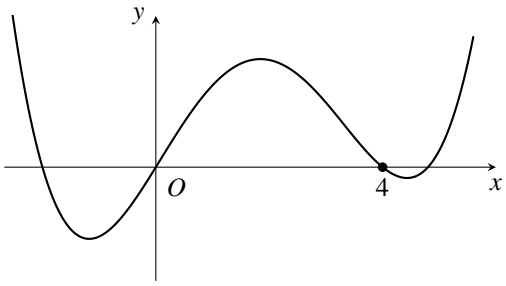
x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	↘	-2	↗	-1	↘	-2	↗	$+\infty$

Số nghiệm thuộc đoạn $[-\pi;2\pi]$ của phương trình $2f(\sin x)+3=0$ là

A. 4 . B. 6 . C. 3 . D. 8 .

Hướng dẫn. Ta có $2f(\sin x)+3=0 \Leftrightarrow f(\sin x)=-\dfrac{3}{2}$.
Dựa vào bảng biến thiên của hàm số $f(x)$:
Ta có: $f(x)=-\dfrac{3}{2} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{c} x=x_1 \text{ (vồi } x_1<-1) \\ x=x_2 \text{ (vồi } -1<x_2<0) \\ x=x_3 \text{ (vồi } 0<x_3<1) \\ x=x_4 \text{ (vồi } x_4>1) \end{array}\right.$.
Do đó: $f(\sin x)=-\dfrac{3}{2} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{c} \sin x=x_1 \text{ (vồi } x_1<-1) \\ \sin x=x_2 \text{ (vồi } -1<x_2<0) \\ \sin x=x_3 \text{ (vồi } 0<x_3<1) \\ \sin x=x_4 \text{ (vồi } x_4>1) \end{array}\right.$.
+) Các trường hợp: $\sin x=x_1$, $\sin x=x_4$ vô nghiệm do $x_1<-1, x_4>1$.
+) Do $-1<x_2<0$ nên tồn tại góc α với $-\dfrac{\pi}{2}<\alpha<0$ sao cho $\sin\alpha=x_2$.
Khi đó: $\sin x=x_2 \Leftrightarrow \sin x=\sin\alpha \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\alpha+k2\pi \\ x=\pi-\alpha+m2\pi \end{array}\right. (k,m\in\mathbb{Z})$.
Theo đầu bài, ta lấy nghiệm $x\in[-\pi;2\pi]$ nên $-\pi\le\alpha+k2\pi\le 2\pi$ hoặc $-\pi\le\pi-\alpha+m2\pi\le 2\pi$, với $k,m\in\mathbb{Z}$ và $-\dfrac{\pi}{2}<\alpha<0$. Suy ra $k=0, k=1$; $m=-1, m=0$.
Do đó, $\sin x=x_2$ có 4 nghiệm thuộc đoạn $[-\pi;2\pi]$.
+) Tương tự, do $0<x_3<1$ nên tồn tại góc β với $0<\beta<\dfrac{\pi}{2}$ sao cho $\sin\beta=x_3$.
Khi đó: $\sin x=x_3 \Leftrightarrow \sin x=\sin\beta \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\beta+n2\pi \\ x=\pi-\beta+l2\pi \end{array}\right. (n,l\in\mathbb{Z})$.
Theo đầu bài, ta lấy nghiệm $x\in[-\pi;2\pi]$ nên $-\pi\le\beta+n2\pi\le 2\pi$ hoặc $-\pi\le\pi-\beta+l2\pi\le 2\pi$ với $n,l\in\mathbb{Z}$ và $0<\beta<\dfrac{\pi}{2}$. Suy ra $n=0$; $l=0$.
Do đó, $\sin x=x_3$ có 2 nghiệm thuộc đoạn $[-\pi;2\pi]$.
Vậy, phương trình $2f(\sin x)+3=0$ có 6 nghiệm thuộc đoạn $[-\pi;2\pi]$. □

Câu 46. (Đề MH 2020) Cho hàm số bậc bốn $y=f(x)$ có đồ thị như hình bên . Số điểm cực trị của hàm số $g(x)=f\left(x^3+3x^2\right)$ là



A. 5 .
B. 3 .
C. 7 .
D. 11 .

Hướng dẫn. Dựa vào đồ thị $y=f(x)$ ta có: $f'(x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=a\in(-\infty;0) \\ x=b\in(0;4) \\ x=c\in(4;+\infty) \end{array}\right.$
Ta có: $g'(x)=\left(3x^2+6x\right)f'\left(x^3+3x^2\right)$.

$$g'(x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}3x^2+6x=0\\ f'\left(x^3+3x^2\right)=0\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll}x=0 & \\ x=-2 & \\ x^3+3x^2=a\in(-\infty;0) & (1)\\ x^3+3x^2=b\in(0;4) & (2)\\ x^3+3x^2=c\in(4;+\infty) & (3)\end{array}\right. .$$

Xét hàm số : $h(x)=x^3+3x^2$

Ta có $h'(x)=3x^2+6x$, $h'(x)=0 \Leftrightarrow 3x^2+6x=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=0\\ x=-2\end{array}\right.$.

Bảng biến thiên

Dựa vào bảng biến thiên ta có Phương trình (1) có một nghiệm .

Phương trình (2) có ba nghiệm phân biệt .

Phương trình (3) có một nghiệm .

Vậy phương trình $g'(x)=0$ có 7 nghiệm bội lẻ phân biệt nên hàm số có 7 điểm cực trị. □

Câu 47. (Đề MH 2020) Có bao nhiêu cặp số nguyên $(x;y)$ thỏa mãn $0\le x\le 2020$ và $\log_3(3x+3)+x=2y+9^y$?

A. 2019 . B. 6 . C. 2020 . D. 4 .

Hướng dẫn. Ta có $\log_3(3x+3)+x=2y+9^y \Leftrightarrow [1+\log_3(x+1)]+x=2y+3^{2y}$
$\Leftrightarrow \log_3(x+1)+x+1=2y+3^{2y} \Leftrightarrow \log_3(x+1)+3^{\log_3(x+1)}=2y+3^{2y}$ (*).
Xét hàm $f(t)=t+3^t$.
Ta có $f'(t)=1+3^t\ln 3>0$, $\forall t\in\mathbb{R}$. Do đó, $f(t)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.
Khi đó, (*) $\Leftrightarrow f[\log_3(x+1)]=f(2y) \Leftrightarrow \log_3(x+1)=2y \Leftrightarrow x+1=9^y$ (**).
Vì $0\le x\le 2020$ nên $1\le 9^y\le 2021 \Rightarrow 0\le y\le \log_9 2021\approx 3,464$.
Vì $y\in\mathbb{Z}$ nên $y\in\{0,1,2,3\}$.
Với $y=0\Rightarrow x=0$; $y=1\Rightarrow x=8$; $y=2\Rightarrow x=80$; $y=3\Rightarrow x=728$.
Vậy có 4 cặp số nguyên (x,y) thỏa mãn. □

Câu 48. (Đề MH 2020) Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn $xf\left(x^3\right)+f\left(1-x^2\right)=-x^{10}+x^6-2x$, $\forall x\in\mathbb{R}$. Khi đó $\int\limits_{-1}^{0} f(x)\,\mathrm{d}x$ bằng

A. $-\dfrac{17}{20}$. B. $-\dfrac{13}{4}$. C. $\dfrac{17}{4}$. D. -1 .

Hướng dẫn. +Ta có $xf\left(x^3\right)+f\left(1-x^2\right)=-x^{10}+x^6-2x$
$\Leftrightarrow x^2f\left(x^3\right)+xf\left(1-x^2\right)=-x^{11}+x^7-2x^2$

$$\Leftrightarrow \int\limits_{-1}^{0} x^2f\left(x^3\right)\mathrm{d}x+\int\limits_{-1}^{0} xf\left(1-x^2\right)\mathrm{d}x=\int\limits_{-1}^{0}\left(-x^{11}+x^7-2x^2\right)\mathrm{d}x$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{3}\int\limits_{-1}^{0} f\left(x^3\right)\mathrm{d}\left(x^3\right)-\frac{1}{2}\int\limits_{-1}^{0} f\left(1-x^2\right)\mathrm{d}\left(1-x^2\right)=-\frac{17}{24}$$

$\Leftrightarrow \frac{1}{3}\int\limits_{-1}^{0} f(x)\,\mathrm{d}x - \frac{1}{2}\int\limits_{0}^{1} f(x)\,\mathrm{d}x = -\frac{17}{24}$ (1)

Ta có $x^2 f\left(x^3\right) + xf\left(1-x^2\right) = -x^{11} + x^7 - 2x^2$

$\Leftrightarrow \int\limits_{0}^{1} x^2 f\left(x^3\right)\mathrm{d}x + \int\limits_{0}^{1} xf\left(1-x^2\right)\mathrm{d}x = \int\limits_{0}^{1}\left(-x^{11}+x^7-2x^2\right)\mathrm{d}x$

$\Leftrightarrow \frac{1}{3}\int\limits_{0}^{1} f\left(x^3\right)\mathrm{d}\left(x^3\right) - \frac{1}{2}\int\limits_{0}^{1} f\left(1-x^2\right)\mathrm{d}\left(1-x^2\right) = -\frac{5}{8} \Leftrightarrow \frac{1}{3}\int\limits_{0}^{1} f(x)\,\mathrm{d}x - \frac{1}{2}\int\limits_{1}^{0} f(x)\,\mathrm{d}x = -\frac{5}{8}$

$\Leftrightarrow \int\limits_{0}^{1} f(x)\,\mathrm{d}x = -\frac{3}{4}$

Từ (1) $\Rightarrow \int\limits_{-1}^{0} f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{-13}{4}$ □

Câu 49. (Đề MH 2020) Cho khối chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông cân tại A , $AB = a$, $\widehat{SBA} = \widehat{SCA} = 90^\circ$, góc giữa hai mặt phẳng (SAB) và (SAC) bằng 60° . Thể tích khối chóp đã cho bằng

A. a^3 . B. $\frac{a^3}{3}$. C. $\frac{a^3}{2}$. D. $\frac{a^3}{6}$.

Hướng dẫn. - Gọi I và H lần lượt là trung điểm của SA và BC . Theo giả thiết $\widehat{SBA} = \widehat{SCA} = 90^\circ$ nên điểm I cách đều 4 điểm S, A, B, C , suy ra I là tâm mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABC$.

- Mặt khác, H là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC , suy ra IH là trục đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC , khi đó $IH \perp (ABC)$.

- Ngoài ra, tam giác ABC vuông cân tại A nên $AH \perp BC$; $AB = a \Rightarrow BC = a\sqrt{2}$ và $AH = \frac{a\sqrt{2}}{2}$. Đặt $IH = x, x > 0$.

- Dựng hệ trục tọa độ $Oxyz$ như hình vẽ sao cho $H(0;0;0)$, $A\left(\frac{a\sqrt{2}}{2};0;0\right)$, $B\left(0;\frac{a\sqrt{2}}{2};0\right)$, $C\left(0;-\frac{a\sqrt{2}}{2};0\right)$, $I(0;0;x)$.

Do I là trung điểm của SA nên ta có $S\left(-\frac{a\sqrt{2}}{2};0;2x\right)$. - Ta có $\overrightarrow{AB} = \left(-\frac{a\sqrt{2}}{2};\frac{a\sqrt{2}}{2};0\right)$, $\overrightarrow{AS} = \left(-a\sqrt{2};0;2x\right)$, suy ra vectơ pháp tuyến của mặt phẳng (SAB) là $\overrightarrow{n_1} = \left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AS}\right] = \left(ax\sqrt{2};ax\sqrt{2};a^2\right)$.

-Ta có $\overrightarrow{CA} = \left(\frac{a\sqrt{2}}{2};\frac{a\sqrt{2}}{2};0\right)$, $\overrightarrow{CS} = \left(-\frac{a\sqrt{2}}{2};\frac{a\sqrt{2}}{2};2x\right)$, suy ra vectơ pháp tuyến của mặt phẳng (SAC) là $\overrightarrow{n_2} = \left[\overrightarrow{CA},\overrightarrow{CS}\right] = \left(ax\sqrt{2};-ax\sqrt{2};a^2\right)$.

Theo giả thiết góc giữa hai mặt phẳng (SAB) và (SAC) bằng 60° nên ta có

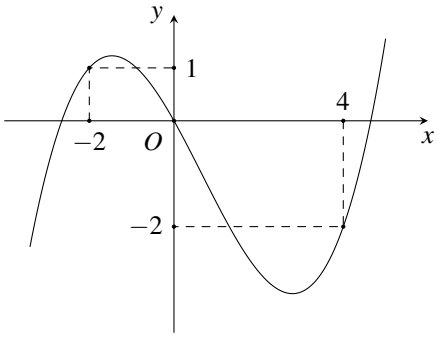
$\cos 60^\circ = \left|\cos\left(\overrightarrow{n_1},\overrightarrow{n_2}\right)\right| = \frac{\left|\overrightarrow{n_1}.\overrightarrow{n_2}\right|}{\left|\overrightarrow{n_1}\right|.\left|\overrightarrow{n_2}\right|} = \frac{\left|2a^2x^2-2a^2x^2+a^4\right|}{\sqrt{2a^2x^2+2a^2x^2+a^4}.\sqrt{2a^2x^2+2a^2x^2+a^4}}$

$\Rightarrow \frac{1}{2} = \frac{a^4}{2a^2x^2+2a^2x^2+a^4} \Leftrightarrow 4a^2x^2+a^4 = 2a^4 \Leftrightarrow x^2 = \frac{a^2}{4} \Leftrightarrow x = \frac{a}{2}$ (do $x, a > 0$).

Khi đó $d(S,(ABC)) = 2d(I,(ABC)) = 2.IH = 2x = a$; $S_{\Delta ABC} = \dfrac{a^2}{2}$

Vậy thể tích khối chóp $S.ABC$ là $V_{S.ABC} = \dfrac{1}{3}.d(S,(ABC)).S_{\Delta ABC} = \dfrac{1}{3}.a.\dfrac{a^2}{2} = \dfrac{a^3}{6}$ (đvtt). □

Câu 50. (Đề MH 2020) Cho hàm số $f(x)$. Hàm số $y = f'(x)$ có đồ thị như hình bên. Hàm số $g(x) = f(1-2x) + x^2 - x$ nghịch biến trên khoảng nào dưới đây?



A. $\left(1;\dfrac{3}{2}\right)$.

B. $\left(0;\dfrac{1}{2}\right)$.

C. $(-2;-1)$.

D. $(2;3)$.

Hướng dẫn. Ta có $g'(x) = -2f'(1-2x) - (1-2x)$

Đặt $u = 1-2x$ ta được hàm số $h(u) = -2\left[f'(u) + \dfrac{1}{2}u\right]$

Từ đồ thị hàm số $y = f'(x)$ ta có đồ thị hàm số $y = f'(u)$ và $y = -\dfrac{1}{2}u$ như hình vẽ

Từ đó ta có $h(u) < 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} -2 < u < 0 \\ u > 4 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} -2 < 1-2x < 0 \\ 1-2x > 4 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \dfrac{1}{2} < x < \dfrac{3}{2} \\ x < -\dfrac{3}{2} \end{array}\right.$. □

Quý thầy cô và các bạn có thể quét QR để xem thêm các tài liệu khác ở đây.

Hết!