PHƯƠNG TRÌNH BẬC HAI CÓ THAM SỐ
VÀ CÁC BÀI TOÁN LIÊN QUAN ĐỊNH LÝ VI-ET

Bài viết này ứng dụng máy tính cầm tay CASIO fx-570VN PLUS để kiểm tra lại kết quả.

MỤC LỤC

I. KIẾN THỨC CHUNG

1. CƠ SỞ

Phương trình bậc hai đối với ẩn $x \in R$ là phương trình có dạng: $ax^2 + bx + c = 0 (1) \quad (a \neq 0)$

a) Cách giải.

- Tính $\Delta = b^2 - 4ac$

☑ Nếu $\Delta < 0$ thì phương trình (1) vô nghiệm.

☑ Nếu $\Delta = 0$ thì phương trình (1) có nghiệm kép $x_1 = x_2 = -\dfrac{b}{2a}$.

✍ Nếu $\Delta > 0$ thì phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}, \quad x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$$

b) Định lý Vi-et – Dấu các nghiệm.

✍ Định lý: Nếu phương trình bậc hai ẩn $x \in R$: $ax^2 + bx + c = 0 (1) \quad (a \neq 0)$ có hai nghiệm x_1, x_2 thì $S = x_1 + x_2 = \dfrac{-b}{a}$, $P = x_1.x_2 = \dfrac{c}{a}$.

✍ Dấu các nghiệm:

- Phương trình (1) có hai nghiệm trái dấu $\Leftrightarrow P < 0$.
- Phương trình (1) có hai nghiệm cùng dấu $\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta \geq 0 \\ P > 0 \end{cases}$.
- Phương trình (1) có hai nghiệm cùng dương $\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta \geq 0 \\ P > 0 \\ S > 0 \end{cases}$.
- Phương trình (1) có hai nghiệm cùng âm $\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta \geq 0 \\ P > 0 \\ S < 0 \end{cases}$.

2. CÔNG THỨC – BÀI TOÁN THƯỜNG GẶP

II. MỘT SỐ BÀI TOÁN THƯỜNG GẶP TRONG CÁC ĐỀ THI NĂM 2015

1. Đề thi Toán (Chuyên) tỉnh Bạc Liêu năm học 2015 – 2016

Cho phương trình $5x^2 + mx - 28 = 0$ (m là tham số). Tìm các giá trị của m để phương trình có 2 nghiệm phân biệt x_1, x_2 thỏa mãn điều kiện $5x_1 + 2x_2 = 1$.

Bài giải

Phương trình $5x^2 + mx - 28 = 0$

$\Delta = m^2 + 560 > 0$ với mọi m

Nên phương trình luôn có 2 nghiệm phân biệt x_1, x_2.

Ta có: $x_1 + x_2 = -m/5$ (1)

$x_1x_2 = -28/5$ (2)

$5x_1 + 2x_2 = 1$ (3)

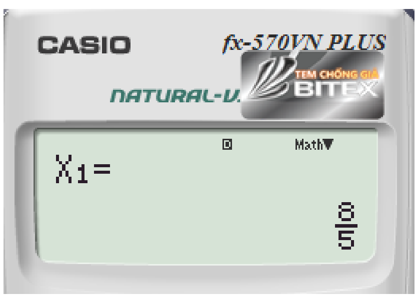
Từ (3) suy ra $x_2 = (1 - 5x_1)/2$ (4)

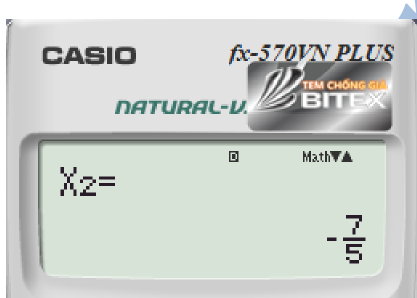
Thay (4) vào (2) suy ra $5x_1(1 - 5x_1) = -56 \Leftrightarrow 25x_1^2 - 5x_1 - 56 = 0 \Leftrightarrow x_1 = 8/5$ hoặc $x_1 = -7/5$

Với $x_1 = 8/5 \rightarrow x_2 = -7/2$

Thay vào (1) ta có $8/5 - 7/2 = -m/5 \Leftrightarrow m = 19/2$

Với $x_1 = -7/5 \rightarrow x_2 = 4 \rightarrow -7/5 + 4 = -m/5$ suy ra $m = -13$





2. Đề thi Toán (Chuyên) tỉnh Bạc Liêu năm học 2015 – 2016

Cho phương trình $x^4 - 2(m - 2)x^2 + 2m - 6 = 0$. Tìm các giá trị của m sao cho phương trình có 4 nghiệm phân biệt.

Bài giải

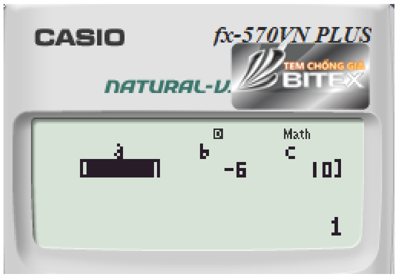
a. $x^4 - 2(m - 2)x^2 + 2m - 6 = 0$. (1)

Đặt $t = x^2$ $(t \geq 0)$

(1) $\Leftrightarrow t^2 - 2(m - 2)t + 2m - 6$ (2)

$\Delta' = (m - 2)^2 - (2m - 6) = m^2 - 6m + 10 = (m - 3)^2 + 1 > 0$ với mọi m.

Kiểm tra bằng máy tính:



Phương trình (2) luôn có 2 nghiệm phân biệt.

Ứng với mỗi nghiệm $t > 0$ thì phương trình (1) có 2 nghiệm phân biệt. Do đó, phương trình (1) có 4 nghiệm phân biệt khi chỉ khi phương trình (2) có hai nghiệm phân biệt dương.

$\Leftrightarrow$ $2m - 6 > 0$ và $2(m - 2) > 0$ $\Leftrightarrow$ $m > 3$.

Vậy $m > 3$ thỏa mãn yêu cầu.

3. *Đề thi Toán (Chuyên) tỉnh Bình Định năm học 2015 – 2016*

Cho phương trình: $x^2 + 2(1 - m)x - 3 + m = 0$, m là tham số.

a) Giải phương trình với m = 0

b) Chứng minh rằng phương trình luôn có hai nghiệm phân biệt với mọi giá trị m

c) Tìm giá trị của m để phương trình có hai nghiệm đối nhau.

Bài giải

a) Thay m = 0 vào phương trình đã cho ta được: $x^2 + 2x - 3 = 0$

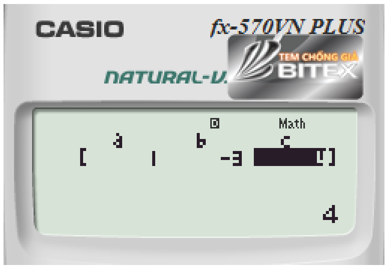
ta có $a + b + c = 1 + 2 - 3 = 0$, phương trình có hai nghiệm là: $x_1 = 1$; $x_2 = -3$

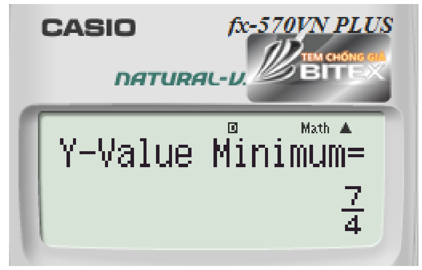
vậy m = 0 phương trình có hai nghiệm là: $x_1 = 1$; $x_2 = -3$

b) Ta có: $\Delta' = (1 - m)^2 - 1(-3 + m) = m^2 - 2m + 1 + 3 - m = m^2 - 3m + 4 = \left(m - \frac{3}{2}\right)^2 + \frac{7}{4} > 0$

với mọi giá trị m.

Kiểm tra bằng máy tính :





Vậy phương trình luôn có hai nghiệm phân biệt với mọi giá trị m.

c) Vì phương trình luôn có hai nghiệm phân biệt với mọi giá trị m.

Nên phương trình có hai nghiệm đối nhau khi: $x_1 + x_2 = 0$

Hay $-2(1 - m) = 0 \Leftrightarrow m = 1$

Vậy m = 1 thì phương trình có hai nghiệm đối nhau.

***4.** Đề thi Toán tỉnh Bình Dương năm học 2015 – 2016*

Cho phương trình $x^2 - 2(m+1)x + 2m = 0$ (m là tham số)

1) Chứng minh phương trình luôn có hai nghiệm phân biệt với mọi m.

2) Tìm các giá trị của m để phương trình có hai nghiệm cùng dương.

3) Tìm hệ thức liên hệ giữa hai nghiệm không phụ thuộc vào m.

Bài giải

1) $\Delta = 4m^2 + 8 > 0$ với mọi m nên phương trình luôn có hai nghiệm phân biệt.

2) Để phương trình có hai nghiệm cùng dương mà $\Delta > 0$ với mọi m thì ta phải có:

$$\begin{cases} P > 0 \\ S > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2m > 0 \\ 2(m+1) > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > 0 \\ m > -1 \end{cases} \Leftrightarrow m > 0$$

3) Theo Viet: S = 2m + 2; P = 2m. Suy ra: $S - P = 2 \Leftrightarrow x_1 + x_2 - x_1x_2 = 2$ là hệ thức liên hệ giữa hai nghiệm không phụ thuộc vào m.

5. *Đề thi Toán tỉnh Bình Phước năm học 2015 – 2016*

Cho phương trình: $x^2 + mx + 1 - 0$ (1), m là tham số.

1) Giải phương trình (1) khi $m = 4$.

2) Tìm giá trị của m để phương trình (1) có 2 nghiệm x_1, x_2 thỏa mãn $\frac{x_1^2}{x_2^2} + \frac{x_2^2}{x_1^2} > 7$.

Bài giải

Khi m = 4, ta có pt: $x^2 + 4x + 1 = 0$ (*)

Pt (*) có $\Delta' = 3 > 0$

Suy ra : $x_{1,2} = -2 \pm \sqrt{3}$

Vậy khi m = 4, pt (1) có 2 nghiệm $x_{1,2} = -2 \pm \sqrt{3}$.

Pt (1) có 2 nghiệm $x_1, x_2 \Leftrightarrow \Delta = m^2 - 4 \geq 0$

$\Leftrightarrow m^2 \geq 4 \Leftrightarrow |m| \geq 2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m \geq 2 \\ m \leq -2 \end{array}\right.$.

Áp dụng hệ thức Vi-ét cho pt (1): $\begin{cases} S = x_1 + x_2 = -m \\ P = x_1 . x_2 = 1 \end{cases}$

Theo đề bài: $\frac{x_1^2}{x_2^2} + \frac{x_2^2}{x_1^2} > 7 \Leftrightarrow \frac{x_1^4 + x_2^4}{x_1^2 . x_2^2} > 7$

$\Leftrightarrow x_1^4 + x_2^4 > 7(x_1.x_2)^2 \Leftrightarrow (x_1^2)^2 + (x_2^2)^2 > 7(x_1.x_2)^2$

$\Leftrightarrow (x_1^2 + x_2^2)^2 - 2x_1^2.x_2^2 > 7(x_1.x_2)^2$

$\Leftrightarrow [(x_1 + x_2)^2 - 2x_1.x_2]^2 > 9(x_1.x_2)^2$

$\Leftrightarrow [(-m)^2 - 2 . 1]^2 > 9 . 1^2$

$\Leftrightarrow (m^2 - 2)^2 > 9 \Leftrightarrow |m^2 - 2| > 3$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m^2-2>3 \\ m^2-2<-3 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m^2>5 \\ m^2<-1 (\text{vô nghiệm}) \end{array}\right.$

Với $m^2 > 5 \Leftrightarrow |m| > \sqrt{5} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m>\sqrt{5} \\ m<-\sqrt{5} \end{array}\right.$ (thỏa ĐK)

Vậy khi $m > \sqrt{5}$ hoặc $m < -\sqrt{5}$ thì pt (1) có 2 nghiệm thỏa $\frac{x_1^2}{x_2^2}+\frac{x_2^2}{x_1^2}>7$.

6. Đề thi Toán tỉnh Bà Rịa – Vũng Tàu năm học 2015 – 2016

Cho phương trình $x^2 + x + m - 2 = 0$ (1).

a) Tìm tất cả các giá trị của m để phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt x_1; x_2 thỏa mãn $x_1^2 + 2x_1x_2 - x_2 = 1$.

b) Giải phương trình $\frac{1}{x^2-x}-2x^2+2x+1=0$

Bài giải

a) Cho phương trình $x^2 + x + m - 2 = 0$ (1). Tìm tất cả các giá trị của m để phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt x_1; x_2 thỏa mãn $x_1^2 + 2x_1x_2 - x_2 = 1$.

+ Để pt có 2 nghiệm phân biệt thì $\Delta = 9 - 4m > 0 \Leftrightarrow m < \frac{9}{4}$

+ Khi $m < \frac{9}{4}$ thì pt có 2 nghiệm phân biệt nên theo Viet: $x_1 + x_2 = -1 \Leftrightarrow x_2 = -1 - x_1$

+ Ta có $x_1^2 + 2x_1x_2 - x_2 = 1 \Leftrightarrow x_1^2 + 2x_1(-1 - x_1) - (-1 - x_1) = 1 \Leftrightarrow x_1^2 + 2x_1 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_1=0 \\ x_1=-1 \end{array}\right.$

+ Với $x_1 = 0$; ta có $0.x_2 = m - 2 \Leftrightarrow m = 2$ (n);

Với $x_1 = -1$; ta có $x_2 = -1 - (-1) = 0 \Leftrightarrow (-1).0 = m - 2 \Leftrightarrow m = 2$ (n);

b) Giải phương trình $\frac{1}{x^2-x}-2x^2+2x+1=0$. ĐK: $\left\{\begin{array}{l} x\neq 0 \\ x\neq 1 \end{array}\right.$

$\Leftrightarrow \frac{1}{x^2-x}-2(x^2-x)+1=0$. (1) Đặt t = x^2-x

$(1) \Leftrightarrow \dfrac{1}{t} - 2t + 1 = 0 \Leftrightarrow 2t^2 - t - 1 = 0.$

Giải ra được nghiệm: $x = 1; x = -\dfrac{1}{2}$.

7. Đề thi Toán (chung) trường THPT Chuyên Nam Định năm học 2015 – 2016

Cho phương trình $x^2 - 2(m-1)x + m^2 - 6 = 0$ (1) (với m là tham số).

a) Giải phương trình với $m = 3$.

b) Với giá trị nào của m thì phương trình (1) có các nghiệm x_1, x_2 thỏa mãn $x_1^2 + x_2^2 = 16$

Bài giải

a) Với $m = 3$, ta có phương trình (1) trở thành $x^2 - 4x + 3 = 0$

Ta có $a + b + c = 1 - 4 + 3 = 0$ nên phương trình có 2 nghiệm phân biệt $x_1 = 1;\ x_2 = 3$

Vậy với $m = 3$, phương trình đã cho có 2 nghiệm phân biệt $x_1 = 1;\ x_2 = 3$

b) $x^2 - 2(m-1)x + m^2 - 6 = 0$ (1)

Phương trình (1) là phương trình bậc 2 ẩn x có $\Delta' = (m-1)^2 - (m^2 - 6) = 7 - 2m$

Phương trình (1) có các nghiệm $x_1, x_2 \Leftrightarrow \Delta' \ge 0 \Leftrightarrow 7 - 2m \ge 0 \Leftrightarrow m \le \dfrac{7}{2}$ (*)

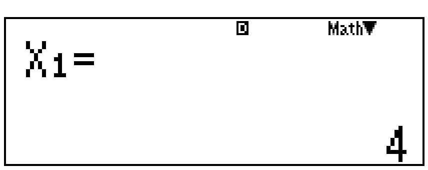
Khi đó theo định lý Viét ta có $x_1 + x_2 = 2(m-1);\ x_1.x_2 = m^2 - 6$

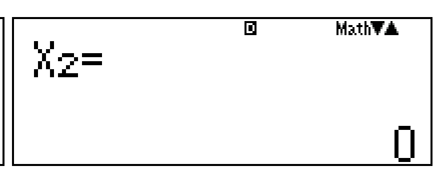
Do đó $x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 = 4(m-1)^2 - 2(m^2 - 6) = 2m^2 - 8m + 16$

Vậy $x_1^2 + x_2^2 = 16 \Leftrightarrow 2m^2 - 8m + 16 = 16 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = 0 \\ m = 4 \end{array}\right.$

Kết hợp điều kiện (*) ta có $m = 0$ là giá trị thỏa mãn.

Kiểm tra bằng máy tính:





8. *Đề thi Toán (chung) trường THPT Chuyên Thái Bình năm học 2015 – 2016*

Cho phương trình $x^2 - 2mx + (m-1)^3 = 0$ (m là tham số).

1) Giải phương trình khi $m = -1$.

2) Tìm m để phương trình có hai nghiệm phân biệt trong đó có một nghiệm bằng bình phương nghiệm còn lại.

Bài giải

Khi $m = -1$ ta có phương trình $x^2 + 2x - 8 = 0$

Giải phương trình ta được hai nghiệm: $x_1 = 2; x_2 = -4$

Tính được $\Delta' = m^2 - (m-1)^3$

Để phương trình có hai nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow m^2 - (m-1)^3 > 0$ (*)

Gọi $x_1; x_2$ là hai nghiệm của phương trình, theo Viet ta có $\begin{cases} x_1 + x_2 = 2m & (1) \\ x_1 x_2 = (m-1)^3 & (2) \end{cases}$

Giả sử $x_1 = (x_2)^2$ thay vào (2) ta được $x_2 = m-1; x_1 = (m-1)^2$

Thay hai nghiệm $x_1; x_2$ vào (1) ta được

$$(m-1)^2 + (m-1) = 2m \Leftrightarrow m^2 - 3m = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = 0 \\ m = 3 \end{array}\right.$$

Khẳng định hai giá trị m vừa tìm được thỏa mãn điều kiện (*), kết luận

9. *Đề thi Toán tỉnh Đồng Nai năm học 2015 – 2016*

1) Chứng minh phương trình $x^2 - 2x - 2 = 0$ có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2.

Tính $T = 2x_1 + x_2.(2 - 3x_1)$.

2) Chứng minh $x^2 - 3x + 5 > 0$, với mọi số thực x.

Bài giải

1. Chứng minh phương trình $x^2 - x - 2 = 0$ luôn có 2 nghiệm phân biệt:

$\Delta' = b'^2 - ac = (-1)^2 - 1(-2) = 3 \Rightarrow \Delta' > 0$ nên phương trình luôn có 2 nghiệm phân biệt.

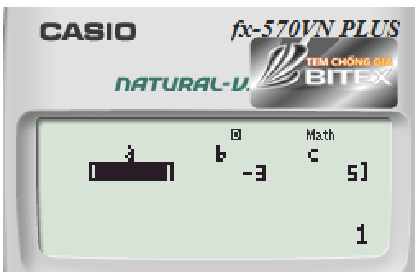
$x_1 + x_2 = 2$; $x_1 . x_2 = -2$.

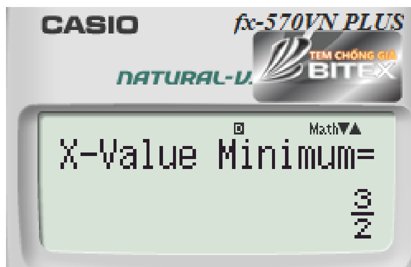
Tính T = $2x_1 + x_2(2 - 3x_1) = 2(x_1 + x_2) - 3x_1 . x_2 = 2.(2) - 3.(-2) = 10$

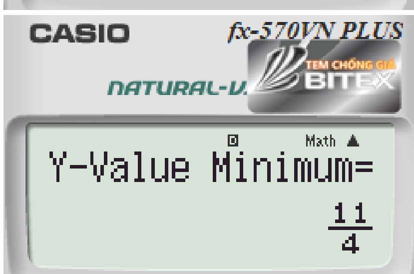
2. Chứng minh $x^2 - 3x + 5 > 0$ với mọi x

$$x^2 - 3x + 5 = x^2 - 2.x.\frac{3}{2} + \left(\frac{3}{2}\right)^2 - \left(\frac{3}{2}\right)^2 + 5 = \left(x - \frac{3}{2}\right)^2 + \frac{11}{4} > 0$$

Kiểm tra bằng máy tính CASIO fx-570VN PLUS:







10. Đề thi Toán Hà Nội năm học 2015 – 2016

Cho phương trình : $x^2 - (m+5)x + 3m + 6 = 0$ (x là ẩn số).

1) Chứng minh phương trình luôn có nghiệm với mọi số thực m.

2) Tìm m để phương trình có hai nghiệm x_1, x_2 là độ dài hai cạnh góc vuông của một tam giác có độ dài cạnh huyền bằng 5.

Bài giải

1) $\Delta = (m+5)^2 - 4(3m+6) = m^2 - 2m + 1 = (m-1)^2 \geq 0, \forall m$

Do đó, phương trình luôn có nghiệm với mọi m.

2) Ta có $x_1 + x_2 = m + 5$ và $x_1x_2 = 3m + 6$. Để $x_1 > 0, x_2 > 0$ điều kiện là $m > -5$ và

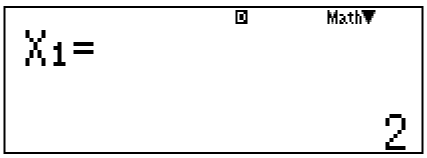
$m > -2 \Leftrightarrow m > -2$ (Điều kiện để S >0, P>0)

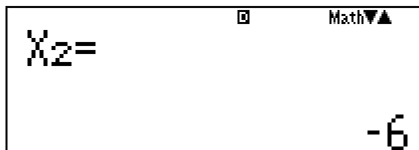
Yêu cầu bài toán tương đương :

$x_1^2 + x_2^2 = 25 \Leftrightarrow (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 = 25$

$\Leftrightarrow (m+5)^2 - 2(3m+6) = 25$ (Do $x_1 + x_2 = m + 5$ và $x_1x_2 = 3m + 6$), m > - 2

$\Leftrightarrow m^2 + 4m - 12 = 0, m > -2 \Leftrightarrow$ m = 2 hay m = -6, m > - 2 $\Leftrightarrow m = 2$





11. Đề thi Toán tỉnh Khánh Hòa năm học 2015 – 2016

Tìm giá trị của m để phương trình $x^2 - mx + 1 = 0$ có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 thoả mãn hệ thức $(x_1+1)^2 + (x_2+1)^2 = 2$.

Bài giải

$\Delta = (-m)^2 - 4.1.1 = m^2 - 4$

Để phương trình có hai nghiệm phân biệt thì: $m^2 - 4 \geq 0 \Leftrightarrow m \geq 2$ hoặc $m \leq -2$

Theo hệ thức Viet, ta có: $x_1 + x_2 = m$; $x_1.x_2 = 1$

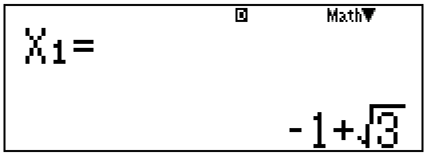
Ta có: $(x_1+1)^2 + (x_2+1)^2 = 2$.

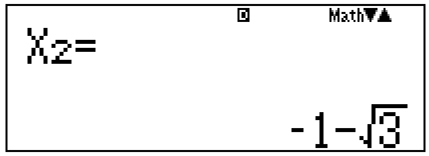
$$x_1^2 + 2x_1 + 1 + x_2^2 + 2x_2 + 1 = 2 \Leftrightarrow (x_1 + x_2)^2 + 2(x_1 + x_2) - 2x_1x_2 = 0$$

Suy ra: $m^2 + 2m - 2 = 0 \Leftrightarrow$ m= $\sqrt{3} - 1$ (không thoả đk) hoặc m= $-\sqrt{3} - 1$ (thoả đk)

Vậy: m= $-\sqrt{3} - 1$

Kiểm tra bằng máy tính:





12. Đề thi Toán tỉnh Phú Thọ năm học 2015 – 2016

Cho Parabol (P): $y = x^2$ và đường thẳng (d) có phương trình: $y = 2(m+1)x - 3m + 2$.

1) Tìm tọa độ giao điểm của (P) và (d) với *m=3.*

2) Chứng minh (P) và (d) luôn cắt nhau tại hai điểm phân biệt *A, B* với mọi *m.*

3) Gọi $x_1; x_2$ là hoành độ giao điểm *A, B.* Tìm *m* để $x_1^2 + x_2^2 = 20$.

Bài giải

a) Thay m=3 ta có (d): $y = 8x - 7$

Phương trình hoành độ giao điểm (P) và (d) khi m=3 là: $x^2 = 8x - 7 \Leftrightarrow x^2 - 8x + 7 = 0$

Giải phương trình: $x_1 = 1; x_2 = 7$

Tọa độ giao điểm (P) và (d) là (1;1); (7; 49)

b) Xét phương trình hoành độ giao điểm (P) và (d): $x^2 - 2(m+1)x + 3m - 2 = 0 \ (1)$

$$\Delta' = m^2 + 2m + 1 - 3m + 2 = m^2 - m + 3 = \left(m - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{11}{4} > 0 \ \forall m$$

Nên phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt $\forall m$. Suy ra (P) và (d) luôn cắt nhau tại hai điểm phân biệt *A, B* với mọi *m*

c)

Ta có $x_1; x_2$ là nghiệm phương trình (1) vì $\Delta' > 0 \ \forall m$ theo Viet ta có:

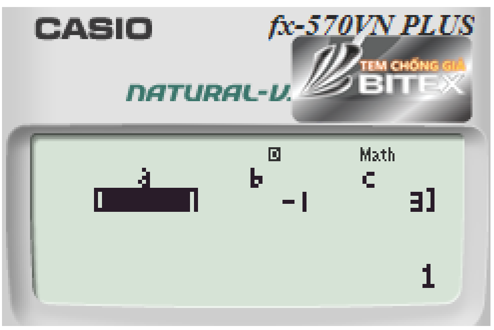
$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 2m + 2 \\ x_1 x_2 = 3m - 2 \end{cases}$$

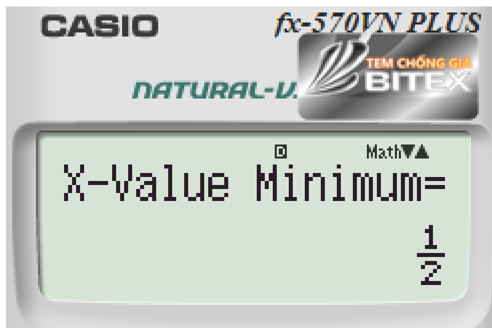
$$x_1^2 + x_2^2 = 20 \Leftrightarrow \left(x_1 + x_2\right)^2 - 2x_1x_2 = 20$$

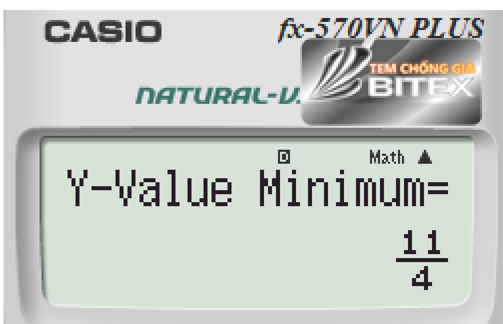
Thay hệ thức Viet ta có:

$$\left(2m+2\right)^2 - 2\left(3m-2\right) = 20 \Leftrightarrow 2m^2 + m - 6 = 0 \Leftrightarrow \left(m-2\right)\left(2m+3\right) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = 2 \\ m = -\dfrac{3}{2} \end{array}\right.$$

Kiểm tra câu 2 bằng máy tính:







13. *Đề thi Toán tỉnh Quảng Bình năm học 2015 – 2016*

Cho phương trình: $x^2 - \left(2m+1\right)x + m^2 + m - 2 = 0$ (1) (m là tham số).

1) Giải phương trình (1) khi $m = 2$.

2) Tìm m để phương trình (1) có 2 nghiệm phân biệt x_1, x_2 thoả mãn:

$$x_1\left(x_1 - 2x_2\right) + x_2\left(x_2 - 3x_1\right) = 9$$

Bài giải

Khi m = 2 thì phương trình (1) trở thành : $x^2 - 5x + 4 = 0$

Phương trình có dạng: a + b +c = 0 hay 1 +(-5) + 4 = 0

Phương trình có hai nghiệm $x_1 = 1$; $x_2 = 4$

Ta có:

$$\Delta = \left[-(2m+1)\right]^2 - 4\left(m^2+m-2\right)$$
$$= 4m^2 + 4m + 1 - 4m^2 - 4m + 8 = 9 > 0$$

$\Rightarrow$ phương trình (1) luôn có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2

Theo định lí Viet $x_1 + x_2 = 2m + 1$, $x_1x_2 = m^2 + m - 2$

Theo đề ra: $x_1(x_1 - 2x_2) + x_2(x_2 - 3x_1) = 9$

$\Leftrightarrow x_1^2 - 2x_1x_2 + x_2^2 - 3x_1x_2 = 9$

$\Leftrightarrow (x_1^2 + x_2^2) - 5x_1x_2 = 9$

$\Leftrightarrow (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 - 5x_1x_2 = 9$

$\Leftrightarrow (x_1 + x_2)^2 - 7x_1x_2 = 9$

$\Leftrightarrow (2m+1)^2 - 7(m^2 + m - 2) = 9$

$\Leftrightarrow 4m^2 + 4m + 1 - 7m^2 - 7m + 14 = 9$

$\Leftrightarrow 3m^2 + 3m - 6 = 0$

Phương trình có dạng: a + b +c = 0 hay 3 +3+ (-6) = 0

$\Rightarrow m_1 = 1$; $m_2 = -2$

Vậy với $m_1 = 1$; $m_2 = -2$ thì phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 và thỏa mãn:

$x_1(x_1 - 2x_2) + x_2(x_2 - 3x_1) = 9$

III. MỘT SỐ ĐỀ THI CỦA THÀNH PHỐ HỒ CHÍ MINH

1. Đề thi Tuyển sinh 10 năm 2015 - 2016

Cho phương trình $x^2 - mx + m - 2 = 0$ (1) (x là ẩn số)

a) Chứng minh phương trình (1) luôn có 2 nghiệm phân biệt với mọi giá trị m

b) Định m để hai nghiệm x_1, x_2 của (1) thỏa mãn $\frac{x_1^2-2}{x_1-1}.\frac{x_2^2-2}{x_2-1} = 4$

Bài giải:

Cho phương trình $x^2 - mx + m - 2 = 0$ (1) (x là ẩn số)

a) Chứng minh phương trình (1) luôn có 2 nghiệm phân biệt với mọi giá trị m

$\Delta = m^2 - 4(m-2) = m^2 - 4m + 8 = (m-2)^2 + 4 > 4 > 0, \forall m$

Vậy phương trình có 2 nghiệm phân biệt với mọi m

b) Định m để hai nghiệm x_1, x_2 của (1) thỏa mãn $\frac{x_1^2-2}{x_1-1}.\frac{x_2^2-2}{x_2-1} = 4$

Vì a + b + c = $1 - m + m - 2 = -1 \neq 0, \forall m$ nên phương trình (1) có 2 nghiệm $x_1, x_2 \neq 1, \forall m$.

Từ (1) suy ra : $x^2 - 2 = mx - m$

$$\frac{x_1^2-2}{x_1-1}.\frac{x_2^2-2}{x_2-1} = 4 \Leftrightarrow \frac{mx_1-m}{x_1-1}.\frac{mx_2-m}{x_2-1} = 4 \Leftrightarrow \frac{m^2(x_1-1)(x_2-1)}{(x_1-1)(x_2-1)} = 4 \Leftrightarrow m^2 = 4 \Leftrightarrow m = \pm 2$$

2. Đề thi Tuyển sinh 10 năm 2014 - 2015

Cho phương trình $x^2 - mx - 1 = 0$ (1) x là ẩn số.

a) Chứng minh phương trình (1) luôn có 2 nghiệm trái dấu

b) Gọi $x_1; x_2$ là các nghiệm của phương trình (1), tính giá trị của biểu thức:

$$P = \frac{x_1^2 + x_1 - 1}{x_1} - \frac{x_2^2 + x_2 - 1}{x_2}$$

Bài giải

a) Ta có $a.c = -1 < 0$ với mọi m nên phương trình (1) luôn có hai nghiệm trái dấu với mọi m.

b) Gọi $x_1;x_2$ là các nghiệm của phương trình (1). Tính giá trị biểu thức:

$P=\frac{x_1^2+x_1-1}{x_1}-\frac{x_2^2+x_2-1}{x_2}$. Ta có $x_1^2=mx_1+1$ và $x_2^2=mx_2+1$ (do $x_1;x_2$ thỏa (1))

Do đó $P=\frac{mx_1+1+x_1-1}{x_1}-\frac{mx_2+1+x_2-1}{x_2}=\frac{(m+1)x_1}{x_1}-\frac{(m+1)x_2}{x_2}=0$ (vì $x_1;x_2\neq 0$

3. Đề thi Tuyển sinh 10 năm 2013 - 2014

Cho phương trình $8x^2-8x+m^2+1=0$ (*) (x là ẩn số).

a) Định m để phương trình (*) có nghiệm $x=\frac{1}{2}$.

b) Định m để phương trình (*) có hai nghiệm x_1; x_2 thỏa điều kiện: $x_1^4-x_2^4=x_1^3-x_2^3$

Bài giải

a) Phương trình (*) có nghiệm $x=\frac{1}{2}\Leftrightarrow m=\pm 1$.

b) $\Delta'=8(1-m^2)$. Khi $m=\pm 1$ thì ta có $\Delta'=0$ tức là: $x_1=x_2$, khi đó yêu cầu bài toán được giải quyết.

Vậy điều kiện để phương trình có hai nghiệm phân biệt là $|m|<1$ hay $-1<m<1$, ta biến đổi như sau:

$$x_1^4-x_2^4=x_1^3-x_2^3\Leftrightarrow(x_1^2-x_2^2)(x_1^2+x_2^2)=(x_1-x_2)(x_1^2+x_1x_2+x_2^2)$$
$$\Leftrightarrow(x_1+x_2)(x_1^2+x_2^2)=(x_1^2+x_1x_2+x_2^2)$$
$$\Leftrightarrow(x_1+x_2)\left[(x_1+x_2)^2-2x_1x_2\right]=(x_1+x_2)^2-x_1x_2$$
$$\Leftrightarrow x_1x_2=0\Leftrightarrow m^2+1=0$$

Điều trên vô lí. Vậy $m=\pm 1$.

4. Đề thi Tuyển sinh 10 năm 2012 - 2013

Cho phương trình $x^2 - 2mx + m - 2 = 0$ (x là ẩn số)

a) Chứng minh rằng phương trình luôn luôn có 2 nghiệm phân biệt với mọi m.
b) Gọi x_1, x_2 là các nghiệm của phương trình.

Tìm m để biểu thức M = $\dfrac{-24}{x_1^2 + x_2^2 - 6x_1x_2}$ đạt giá trị nhỏ nhất

Bài giải

a/ Phương trình (1) có Δ' = m^2 - 4m +8 = $(m - 2)^2$ +4 > 0 với mọi m nên phương trình (1) có 2 nghiệm phân biệt với mọi m.

b/ Do đó, theo Viet, với mọi m, ta có: S = $-\dfrac{b}{a} = 2m$; P = $\dfrac{c}{a} = m - 2$

M = $\dfrac{-24}{(x_1 + x_2)^2 - 8x_1x_2} = \dfrac{-24}{4m^2 - 8m + 16} = \dfrac{-6}{m^2 - 2m + 4}$

$= \dfrac{-6}{(m-1)^2 + 3}$. Khi m = 1 ta có $(m-1)^2 + 3$ nhỏ nhất

$\Rightarrow -M = \dfrac{6}{(m-1)^2 + 3}$ lớn nhất khi m = 1 $\Rightarrow M = \dfrac{-6}{(m-1)^2 + 3}$ nhỏ nhất khi m = 1

Vậy M đạt giá trị nhỏ nhất là - 2 khi m = 1

IV. MỘT SỐ DẠNG TOÁN KHÁC CÓ TRONG ĐỀ THI CÁC TỈNH, THÀNH PHỐ VÀ CÁC QUẬN, HUYỆN:

Một số dạng toán khác có trong đề thi các Tỉnh và các Quận, huyện.

1) Đề kiểm tra học kỳ II, năm học 2015 – 2016, tỉnh Đồng Nai.

Cho phương trình: $x^2 - mx + 1005m = 0$ (x là ẩn, m là tham số) có hai nghiệm $x_1; x_2$.

Tìm giá trị của m để biểu thức $M = \dfrac{2x_1x_2 + 2680}{x_1{}^2 + x_2{}^2 + 2\left(x_1x_2 + 1\right) - 1}$ đạt giá trị nhỏ nhất.

Bài giải

CÁCH 1:

Tìm m để hai nghiệm phân biệt này thỏa mãn điều kiện:

Áp dụng Định lí Vi-et, ta có: $\begin{cases} x_1 + x_2 = -\dfrac{b}{a} = m \\ x_1x_2 = \dfrac{c}{a} = 1005m \end{cases}$

Biến đổi biểu thức:

$$M = \frac{2x_1x_2 + 2680}{x_1^{\,2} + x_2^{\,2} + 2\left(x_1x_2 + 1\right) - 1} = \frac{2x_1x_2 + 2680}{\left(x_1 + x_2\right)^2 + 1} = \frac{2010m + 2680}{m^2 + 1}$$

Bài toán đưa về tìm m để biểu thức $M = \dfrac{2010m + 2680}{m^2 + 1}$ đạt giá trị nhỏ nhất.

Biểu thức $\dfrac{2010m + 2680}{m^2 + 1}$ nhận giá trị là M khi và chỉ khi phương trình sau có nghiệm:

$$\frac{2010m + 2680}{m^2 + 1} = a \Leftrightarrow am^2 - 2010m + a - 2680 = 0 \quad (1)$$

(a ở đây thay cho M để tránh nhầm lẫn ký hiệu).

+ Trường hợp (1): $a = 0 \Leftrightarrow m = \dfrac{-2680}{2010} = \dfrac{-4}{3}$

+ Trường hợp (2): $a \neq 0$. Để (1) có nghiệm thì

$\Delta' = 1005^2 - a\left(a - 2680\right) = 1010025 - a^2 + 2680a = \left(3015 - a\right)\left(a + 335\right)$

$$\Delta' \geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 3015 - a \geq 0 \\ a + 335 \geq 0 \end{cases} \vee \begin{cases} 3015 - a \leq 0 \\ a + 335 \leq 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a \leq 3015 \\ a \geq -335 \end{cases} \vee \begin{cases} a \geq 3015 \\ a \leq -335 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow -335 \leq a \leq 3015$$

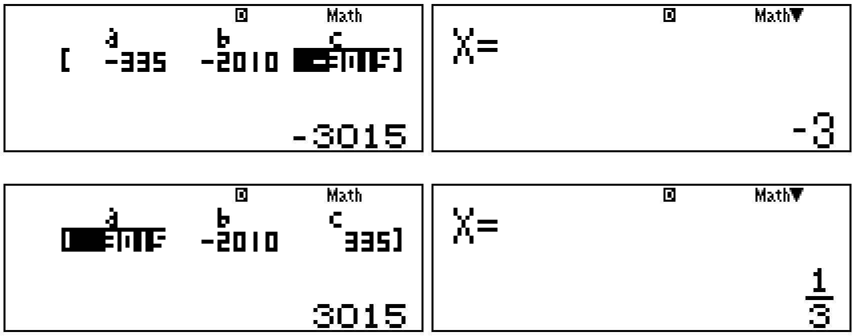
Kiểm tra lại bằng máy tính, giải bất phương trình bằng cách bấm:

MODE ▼ 1 1 3 − 1 = 2 6 8 0 = 1 0 1 0 0 2 5 =

Màn hình hiển thị:

```
A≤X≤B                D      Math
          -335≤X≤3015
```

Tìm lại m trong phương trình $am^2 - 2010m + a - 2680 = 0$ tương ứng với $a = -335; a = 3015$:



Kết luận:

+ M đạt giá trị nhỏ nhất là -335 khi và chỉ khi $m = -3$.

+ M đạt giá trị lớn nhất là 3015 khi và chỉ khi $m = \frac{1}{3}$. (làm thêm).

CÁCH 2:

Biến đổi như sau: $M = \dfrac{2010m + 2680}{m^2 + 1} = a + \dfrac{-am^2 + 2010m - a + 2680}{m^2 + 1}$

Tìm a để $-am^2 + 2010m - a + 2680$ (*) là bình phương của nhị thức, nghĩa là (*) có nghiệm kép.

$$\Delta' = 1005^2 + a(-a + 2680) = 1010025 - a^2 + 2680a = (3015 - a)(a + 335)$$

$$\Delta' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a = -335 \\ a = 3015 \end{array}\right.$$

+ Trường hợp 1: $a = -335$, ta được:

$$M = -335 + \frac{(m+3)^2}{m^2 + 1} \geq -335 .$$

+ Trường hợp 2: $a = 3015$, ta được:

$$M = 3015 - \frac{3015\left(m - \frac{1}{3}\right)^2}{m^2 + 1} \leq 3015 .$$

Ta cũng có kết luận tương tự.

2) Đề KSCL lớp 9, năm học 2015 – 2016, tỉnh Bắc Ninh.

Tìm Giá trị lớn nhất và Giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$A=\frac{x^2-x+1}{x^2+x+1}$$

Bài giải

CÁCH 1:

Biểu thức $\dfrac{x^2-x+1}{x^2+x+1}$ nhận giá trị là A khi và chỉ khi phương trình sau có nghiệm:

$$\frac{x^2-x+1}{x^2+x+1}=A\Leftrightarrow \qquad (1)$$

(a ở đây thay cho M để tránh nhầm lẫn ký hiệu).

+ Trường hợp (1): $a=0\Leftrightarrow m=\dfrac{-2680}{2010}=\dfrac{-4}{3}$

+ Trường hợp (2): $a\neq 0$. Để (1) có nghiệm thì

$\Delta'=1005^2-a\left(a-2680\right)=1010025-a^2+2680a=\left(3015-a\right)\left(a+335\right)$

$$\Delta'\geq 0\Leftrightarrow \begin{cases}3015-a\geq 0\\ a+335\geq 0\end{cases}\vee\begin{cases}3015-a\leq 0\\ a+335\leq 0\end{cases}$$

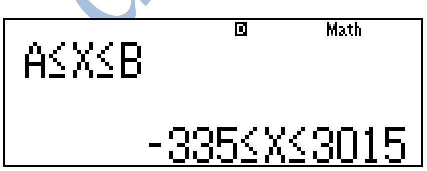
$$\Leftrightarrow \begin{cases}a\leq 3015\\ a\geq -335\end{cases}\vee\begin{cases}a\geq 3015\\ a\leq -335\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow -335\leq a\leq 3015$$

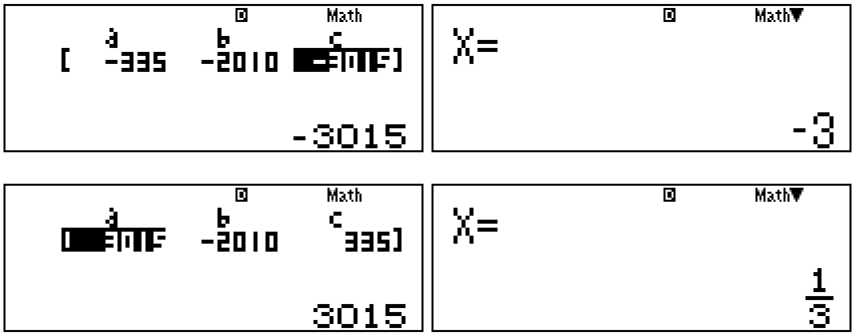
Kiểm tra lại bằng máy tính, giải bất phương trình bằng cách bấm:

MODE ▼ 1 1 3 − 1 = 2 6 8 0 = 1 0 1 0 0 2 5 =

Màn hình hiển thị:



Tìm lại m trong phương trình $am^2-2010m+a-2680=0$ tương ứng với $a=-335;a=3015$:



Kết luận:

+ M đạt giá trị nhỏ nhất là -335 khi và chỉ khi $m=-3$.

+ M đạt giá trị lớn nhất là 3015 khi và chỉ khi $m=\frac{1}{3}$. (làm thêm).

CÁCH 2:

Biến đổi như sau: $M=\dfrac{2010m+2680}{m^2+1}=a+\dfrac{-am^2+2010m-a+2680}{m^2+1}$

Tìm a để $-am^2+2010m-a+2680$ (*) là bình phương của nhị thức, nghĩa là (*) có nghiệm kép.

$$\Delta'=1005^2+a\left(-a+2680\right)=1010025-a^2+2680a=\left(3015-a\right)\left(a+335\right)$$

$$\Delta'=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}a=-335\\a=3015\end{array}\right.$$

+ Trường hợp 1: $a=-335$, ta được:

$$M=-335+\frac{(m+3)^2}{m^2+1}\geq-335\ .$$

+ Trường hợp 2: $a=3015$, ta được:

$$M=3015-\frac{3015\left(m-\frac{1}{3}\right)^2}{m^2+1}\leq 3015\ .$$

Ta cũng có kết luận tương tự.