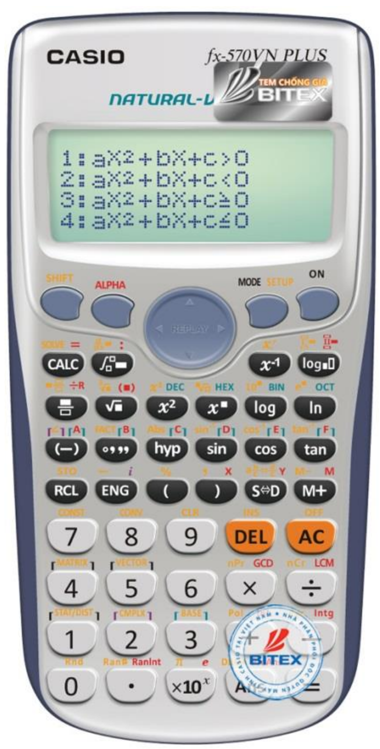
TỔNG HỢP CÁC DẠNG TOÁN LÃI SUẤT

MỤC LỤC



I. KIẾN THỨC CHUNG

1. Lãi đơn

Là số tiền lãi chỉ tính trên số tiền gốc mà không tính trên số tiền lãi do số tiền gốc sinh ra. Công thức tính lãi đơn:

$$\boxed{A = V_0(1 + r.n)}$$

Trong đó:

- A là số tiền cả vốn lẫn lãi trong tương lai.
- V_0 là số tiền gốc ban đầu.
- r là lãi suất định kỳ, đơn vị $\%$.
- n là số kỳ hạn tính lãi.

2. Lãi kép

Gồm hai loại sau:

2.1 Lãi kép, gửi một lần

Là số tiền lãi không chỉ tính trên số tiền gốc mà còn tính trên số tiền lãi do tiền gốc đó sinh ra thay đổi theo từng định kỳ. Lãi phát sinh của kỳ trước được gộp chung với gốc để tính cho kỳ lãi tiếp theo. Thông thường, trong các bài toán thực tế, ta hay gặp loại lãi kép này. Công thức tính lãi kép:

$$\boxed{A = V_0\left(1 + r\right)^n}$$

Trong đó:

- A là số tiền cả vốn lẫn lãi trong tương lai.
- V_0 là số tiền gốc ban đầu.
- r là lãi suất định kỳ, đơn vị $\%$.
- n là số kỳ hạn tính lãi.

2.2 Lãi kép, gửi định kỳ

Định kỳ gửi vào ngân hàng một số tiền giống nhau, lãi suất trong suốt quá trình gửi không đổi. Quy ước định kỳ được hiểu là tháng.

Công thức tính số tiền sau n kỳ hạn cũng được chia làm hai trường hợp sau:

Trường hợp 1: Tiền được gửi vào đầu tháng.

+ Gọi số tiền mỗi tháng người đó gửi là M .
+ Lãi suất mỗi tháng r.

Công thức tổng quát:

+ Cuối tháng thứ 1, người đó có số tiền là: $T_1 = M + M\,r = M\;1+r$.
+ Đầu tháng thứ 2, người đó có số tiền là:

$$M(1+r)+M = M\;(1+r)+1\; = \frac{M}{(1+r)-1}\left[(1+r)^2-1\right] = \frac{M}{r}\left[(1+r)^2-1\right]$$

+ Cuối tháng thứ 2, người đó có số tiền là:

$$\frac{M}{r}\left[(1+r)^2-1\right]+\frac{M}{r}\left[(1+r)^2-1\right].r = \frac{M}{r}\left[(1+r)^2-1\right](1+r)$$

+ Đầu tháng thứ 3, người đó có số tiền là:

$$\frac{M}{r}\left[(1+r)^2-1\right](1+r)+\frac{M}{r}.r = \frac{M}{r}\left[(1+r)^3-1\right]$$

+ Cuối tháng thứ 3, người đó có số tiền là:

$$\frac{M}{r}\left[(1+r)^3-1\right]+\frac{M}{r}\left[(1+r)^3-1\right].r = \frac{M}{r}\left[(1+r)^3-1\right](1+r)$$

+ Cuối tháng thứ n, người đó có số tiền là:

$$\boxed{T_n = \frac{M}{r}\left[(1+r)^n-1\right](1+r)}$$

Trường hợp 2: Tiền được gửi vào cuối mỗi tháng.

Chứng minh tương tự:

Cách 1:

+ Cuối tháng thứ nhất cũng là lúc người đó bắt đầu gửi tiền: $T_1 = M$.

+ Cuối tháng thứ 2, người đó có số tiền là:

$$M(1+r)+M = M\;(1+r)+1\; = \frac{M}{(1+r)-1}\left[(1+r)^2-1\right] = \frac{M}{r}\left[(1+r)^2-1\right]$$

+ Cuối tháng thứ 3, người đó có số tiền là:

$$\frac{M}{r}\left[(1+r)^2-1\right](1+r)+\frac{M}{r}.r=\frac{M}{r}\left[(1+r)^3-1\right]$$

Ta được công thức: Cuối tháng thứ n, người đó có số tiền là:

$$\boxed{T_n=\frac{M}{r}\left[(1+r)^n-1\right]}$$

Cách 2: Một cách tiếp cận khác

+ Tiền gửi tháng thứ nhất sau $n-1$ kỳ hạn ($n-1$ tháng): $M(1+r)^{n-1}$.

+ Tiền gửi tháng thứ hai sau $n-2$ kỳ hạn ($n-2$ tháng): $M(1+r)^{n-2}$.

…

+ Tiền gửi tháng cuối cùng: $M(1+r)^0$.

Vậy áp dụng công thức, ta được:

Số tiền cuối tháng n là: $M\dfrac{(1+r)^n-1}{1+r-1}=M\dfrac{(1+r)^n-1}{r}$

Ta cũng được công thức trên.

Nhận xét: Công thức của trường hợp 1 và trường hợp 2 là tương tự nhau, tuy nhiên có sai khác một lượng $\frac{M}{r}\left[(1+r)^n-1\right].r$ là do khi gửi tiền vào đầu tháng thì cuối tháng thứ nhất số tiền của người đó đã tăng lên kèm với lãi suất mà không phải chờ tới cuối tháng thứ hai.

Ghi chú thêm rằng nếu đề bài không nói rõ người gửi tiền gửi vào đầu tháng hay cuối tháng thì học sinh phải làm cả thảy hai trường hợp trên.

II. CÁC DẠNG TOÁN THƯỜNG GẶP

1. Lãi kép đơn thuần

Bài 1: Một người gửi 10000000 (10 triệu đồng) vào ngân hàng với lãi suất 0.6%/tháng. Tính số tiền mà người đó có được sau 1 năm.

Giải: Kỳ hạn gửi của bài này là 1 tháng. Mà một năm có 12 tháng nên áp dụng công thức, số tiền mà người gửi có được sau 1 năm là:

$$T_{12} = 10000000\left(1+0.6\%\right)^{12} \approx 10744241.68$$

Bài 2: Một người gởi tiết kiệm 100.000.000đồng (tiền Việt Nam) vào một ngân hàng theo mức kỳ hạn 6 tháng với lãi xuất 0.65% một tháng.

a/ Hỏi sau 10 năm, người đó nhận được bao nhiêu tiền cả vốn lẫn lãi ngân hàng. Biết rằng người đó không rút lãi ở tất cả các định kỳ trước đó.

b/ Nếu với số tiền trên, người đó gửi tiết kiệm theo mức kỳ hạn 3 tháng với lãi xuất 0.63% một tháng thì sau 10 năm sẽ nhận được bao nhiêu tiền cả vốn lẫn lãi ở ngân hàng. Biết rằng người đó không rút lãi ở tất cả các định kỳ trước đó.

Giải:

Ta quy 10 năm ra các kỳ hạn tương ứng với hai phần a) và b)

a) 10 năm là $\dfrac{10\times12}{6}=20$ kỳ hạn,

Lãi suất theo định kỳ 6 tháng là: $6\times0.65\%=3.9\%$.

b) 10 năm là $\dfrac{10\times12}{3}=40$ kỳ hạn

Lãi suất theo định kỳ 3 tháng là: $3\times0.63\%=1.89\%$.

Công thức tính lãi suất kép:

$$T_n = V_0(1+r)^n$$

với

+ T_n là tiền vốn lẫn lãi sau n tháng (kỳ hạn);

+ V_0 là tiền vốn ban đầu;

+ r (đơn vị %) là tiền lãi suất sau n tháng (kỳ hạn).

Vậy thì áp dụng công thức lãi kép, ta được:

a)

$$T_{20} = V_0(1+r)^{20} = 10000000(1+3.9\%)^{20} = 21493688\text{VND}$$

b)

$$T_{40} = V_0(1+r)^{40} = 10000000(1+1.89\%)^{40} = 21147668\text{VND}$$

Bài 3: Bà Nga có một số tiền 200 triệu đồng chia ra ở hai ngân hàng X và Y. Số tiền thứ nhất gửiở ngân hàng X lãi suất 2%/quý trong 15 tháng. Số tiền thứ hai gửi ở ngân hàng Y lãi suất 2,15%/quý trong 12 tháng. Nếu lãi gộp vốn mỗi quý một lần và tổng lãi suất được ở hai ngân hàng là 189841000 đ. Hãy tính số tiền bà Nga gửi ở mỗi ngân hàng.

Giải: Gọi số tiền bà Nga gửi ngân hàng X là X.

Suy ra số tiền bà Nga gửi ngân hàng Y là $Y = 200\ 000\ 000 - X$.

Lãi gộp vốn trong ngân hàng X trong 5 quý là: $A = X(1+2\%)^5$ (1) .

Lãi gộp vốn trong ngân hàng Y trong 4 quý là: $B = Y(1+2{,}15\%)^4$ (2) .

Tổng lãi suất được ở 2 ngân hàng: $A + B - 200000000 = 189841000$ (3).

Từ 1 , 2 , 3 , ta có phương trình:

$$X(1+2\%)^5 + (200000000 - X)(1+2{,}15\%)^4 - 200000000 = 18984100$$

Giải ra ta được X=80 000 000 đồng. Suy ra Y=120000000 đồng.

2. Trả nợ - Trả góp

Bài 1: Một người muốn rằng sau 8 tháng có 50 000$ để xây nhà. Hỏi rằng người đó phải gửi ngân hàng mỗi tháng (số tiền như nhau) là bao nhiêu? Biết lãi suất mỗi tháng là 0.25%.

Giải:

Coi rằng người đó gửi tiền vào thời điểm cuối tháng, áp dụng công thức Lãi kép, gửi hàng tháng:

$$\boxed{T_n = \frac{M}{r}\left[(1+r)^n - 1\right]}$$

Thế số $T_8 = 50000, r = 0.25\%$

$$M = \frac{50000 \times 0.25\%}{(1+0.25\%)\left[(1+0.25\%)^8 - 1\right]}$$

Bài 2: Trả góp

Một xe máy điện giá 10000000 đồng được bán trả góp 11 lần, mỗi lần trả góp với số tiền là 1000000 đồng (lần đầu trả sau khi nhận xe được 1 tháng).

Tính lãi suất tiền hàng tháng.

Giải:

Áp dụng công thức Lãi kép, gửi hàng tháng:

$$\boxed{T_n = \frac{M}{r}\left[(1+r)^n - 1\right]}$$

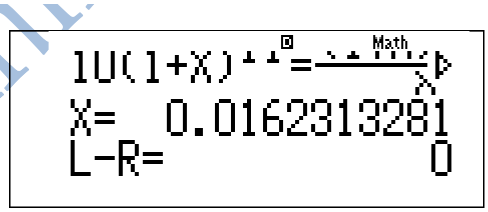
Tiền giá xe ban đầu, sau 11 tháng tăng lên thành: $T_{11} = 10000000(1+r)^{11}$

Tương ứng với phương trình sau:

$$10000000(1+r)^{11} = 1000000.\frac{\left[(1+r)^{11} - 1\right]}{r}$$

Nhập trực tiếp phương trình vào máy và giải bằng SHIFT CALC (SOLVE):

$$10000000(1+X)^{11} = 1000000.\frac{\left[(1+X)^{11} - 1\right]}{X}$$



Ta được:

$r \approx 1,62\%$

III. Trích dẫn đề thi CASIO các năm

1. Đề thi Quốc Gia các năm

a/ Đề thi Quốc gia năm 2013:

Bài 2 (5 điểm): Một anh sinh viên được gia đình gửi vào sổ tiết kiệm ngân hàng là 80000000 đồng với lãi suất 0.9%/tháng.

1) Hỏi sau đúng 5 năm số tiền trong sổ sẽ là bao nhiêu, biết rằng trong suốt thời gian đó anh sinh viên không rút một đồng nào cả vốn lẫn lãi?

2) Nếu mỗi tháng anh sinh viên đó đều rút ra một số tiền như nhau vào ngày ngân hàng trả lãi thì hằng tháng anh ta rút bao nhiêu tiền (làm tròn đến 1000 đồng) để sau đúng 5 năm sẽ vừa hết số tiền cả vỗn lẫn lãi.

Bài giải

1) Gọi M là số tiền gốc gửi vào sổ tiết kiệm,

r là lãi suất hằng tháng (đơn vị %).

Sau 5 năm (60 tháng) thì số tiền trong sổ là:

Áp dụng công thức lãi kép:

$$T = M(1+r)^{60} = 80000000\left(1+\frac{0.9}{100}\right)^{60} = 136949345,6$$

2) Gọi M là số tiền gốc gửi vào sổ tiết kiệm,

a là số tiền mà hằng tháng anh ta rút ra,

r là lãi suất hằng tháng (đơn vị %).

Sau n tháng, số tiền mà anh ta rút ra hàng tháng tổng cộng là:

Áp dụng công thức Lãi kép, gửi hàng tháng:

$$T_n = \frac{a}{r}\left[(1+r)^n - 1\right]$$

Số tiền ban đầu, sau n tháng là:

$$M(1+r)^n$$

Sau tháng thứ n, số tiền anh ta vừa hết thì:

$$M\ 1+r\ ^{n}-\frac{a}{r}\left[(1+r)^{n}-1\right]=0$$

$$a=\frac{M.r.\ 1+r\ ^{n}}{(1+r)^{n}-1}$$

Thay số ta được:

$$a=\frac{80000000.0,9\%.\left(1+0,9\%\right)^{60}}{\left(1+0,9\%\right)^{60}-1}=1731425,144$$

b/ Đề thi Quốc gia năm 2014:

Anh A mua nhà trị giá 300000000 (Ba trăm triệu đồng) theo phương thức trả góp.

Câu 1: (5 điểm) Nếu cuối mỗi tháng , bắt đầu từ tháng thứ nhất anh A trả 5500000đ và chịu lãi suất số tiền chưa trả là $0,5\%$/tháng thì sau bao nhiêu tháng anh A trả hết số tiền trên.

Câu 2: (5 điểm) Nếu anh A muốn trả hết nợ trong vòng 5 năm và phải trả lãi với mức 6% /năm thì mỗi tháng anh A phải trả bao nhiêu tiền? (làm tròn đến nghìn đồng).

Bài giải

Câu 1:

Gọi số tiền anh A nợ ban đầu là M, lãi suất hàng tháng là r %, số tiền hàng tháng anh ta phải trả là a.

Với đề bài này có thể coi là "người nợ tiền nợ vào đầu tháng".

Sau n tháng thì số tiền người này nợ là:

$$M\left(1+r\right)^{n}$$

Số tiền người này trả mỗi tháng, sau n tháng là:

$$\frac{a}{r}\left[(1+r)^{n}-1\right]$$

Người này trả hết nợ, nghĩa là:

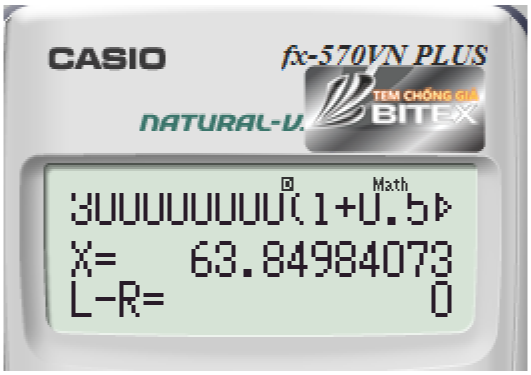
$$M\left(1+r\right)^{n}-\frac{a}{r}\left[(1+r)^{n}-1\right]=0$$

Thay số với M=300000000, r=0,5%, a=5500000.

Bấm máy:

[3] [0] [0] [0] [0] [0] [0] [0] [0] [(] [1] [+] [0] [.] [5] [SHIFT] [(] [)] [$x^{\blacksquare}$] [ALPHA] [)] [▶]
[−] [$\frac{\blacksquare}{\blacksquare}$] [5] [5] [0] [0] [0] [0] [0] [▼] [0] [.] [5] [SHIFT] [(] [▶] [(] [(] [1] [+] [0] [.] [5]
[SHIFT] [(] [)] [$x^{\blacksquare}$] [ALPHA] [)] [▶] [−] [1] [)] [SHIFT] [CALC] [=]

Màn hình hiển thị:



Vậy $n = 64$ tháng.

Câu 2: Thay vào công thức

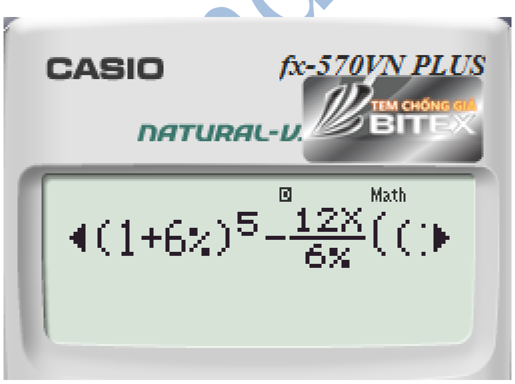
$$M\left(1+r\right)^n - \frac{a}{r}\left[\left(1+r\right)^n - 1\right] = 0$$

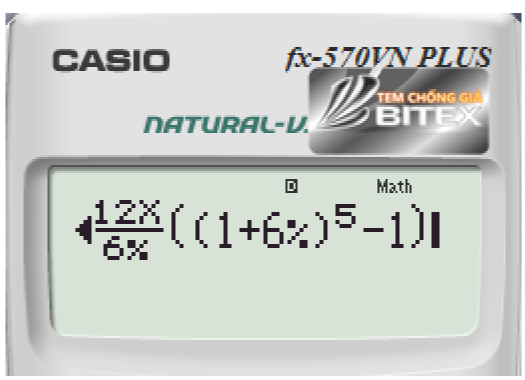
Với M=300000000, r=6 (%/năm)., n=5. Tìm a (tiền trả hàng năm):

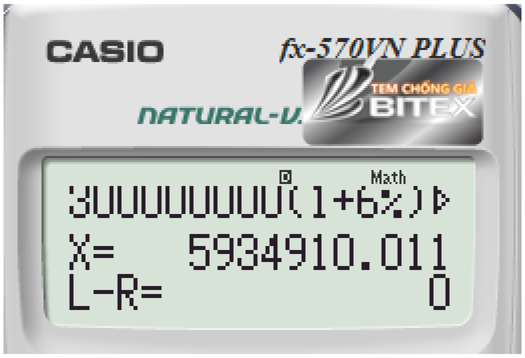
Vậy tiền trả hàng tháng sẽ áp dụng công thức:

$$M\left(1+r\right)^n - \frac{12a}{r}\left[\left(1+r\right)^n - 1\right] = 0$$

Màn hình hiển thị: Chỉnh sửa lại màn hình ở câu trên:







Kết luận: Số tiền phải trả hàng tháng là: 5935000 (đồng).

c/ Đề thi Quốc gia năm 2015:

Câu 5. Lãi suất tiền gửi tiết kiệm của một số ngân hàng thời gian vừa qua liên tục thay đổi. Bác An gửi số tiền ban đầu là 5 triệu đồng với lãi suất 0,7% tháng. Chưa đầy một năm, thì lãi suất tăng lên 1,15% tháng, trong nửa năm tiếp theo và bác An tiếp tục gửi; sau nửa năm đó lãi suất giảm xuống còn 0,9% tháng, bác An tiếp tục gửi thêm một số tháng tròn nữa, khi rút tiền bác An được cả vốn lẫn lãi là 5787 710,707 đồng (chưa làm tròn). Hỏi bác An đã gửi tiền tiết kiệm trong bao nhiêu tháng?.

Bài giải

Gọi a là số tháng gửi với lãi suất 0,7% tháng, x là số tháng gửi với lãi suất 0,9% tháng, thì số tháng gửi tiết kiệm là: a + 6 + x. Khi đó, số tiền gửi cả vốn lẫn lãi là:

$$5000000\times 1.007^{a}\times 1.0115^{6}\times 1.009^{x}=5787710,707$$

Quy trình bấm phím:

5000000 $\boxed{\times}$ 1.007 $\boxed{\wedge}$ $\boxed{\text{ALPHA}}$ A $\boxed{\times}$ 1.0115 $\boxed{\wedge}$ 6 $\boxed{\times}$ 1.009 $\boxed{\wedge}$ $\boxed{\text{ALPHA}}$ X $\boxed{-}$ 5787710,707 $\boxed{\text{ALPHA}}$ $\boxed{=}$ 0

$\boxed{\text{SHIFT}}$ $\boxed{\text{SOLVE}}$ Nhập giá trị của A là 1 $\boxed{=}$ Nhập giá trị đầu cho X là 1 $\boxed{=}$ $\boxed{\text{SHIFT}}$ $\boxed{\text{SOLVE}}$

Cho kết quả X là số không nguyên.

Lặp lại quy trình với A nhập vào lần lượt là 2, 3, 4, 5, 6 ...đến khi nhận được giá trị nguyên của X = 4 khi A = 6. Vậy số tháng bác An gửi tiết kiệm là: 6 + 6 + 4 = 16 tháng.

Kết quả: 16.

2. Đề thi cấp tỉnh các năm

Bài 1 : Trích đề thi giải toán trên MTCT lớp 9 tỉnh Gia Lai năm 2013-2014

Bố bạn An tặng cho bạn ấy một máy tính Laptop trị giá 14.000.000 đồng *(mười bốn triệu đồng)* bằng cách cho bạn tiền hàng tháng với phương thức sau: Tháng đầu tiên bạn An nhận được 200.000 đồng *(hai trăm nghìn đồng)*, các tháng từ tháng thứ hai trở đi, mỗi tháng nhận được số tiền hơn tháng trước 50.000 đồng *(năm mươi nghìn đồng)*.

a) Nếu chọn cách gửi tiết kiệm số tiền nhận được hàng tháng với lãi suất 0,65%/tháng, thì bạn An phải gửi bao nhiêu tháng mới đủ tiền mua máy vi tính?

b) Nếu bạn An muốn có ngay máy tính bằng cách chọn phương thức mua trả góp hàng tháng bằng số tiền bố cho với lãi suất 0,8%/tháng, thì bạn An phải trả góp bao nhiêu tháng mới trả hết nợ?

Giải trên máy tính CASIO fx-570VN PLUS

a)

Ghi vào màn hình

$D = D + 1 : B = B + 50000 : A = A \times 1{,}0065 + B$

Bấm r nhập D=1 bấm 1=

Nhập B = 200 000, A = 200 000

Bấm 200000=200000=

Bấm =đến khi thấy A= 14137856.19 ứng với D = 20

Vậy số tháng cần gửi: 20 tháng

b)

Tháng thứ nhất, sau khi góp còn nợ: 13.800.000 đồng

Tháng sau góp: B = B + 50.000 còn nợ: A = A × 1,008 – B

Ghi vào màn hình $D = D + 1 : B = B + 50000 : \ A = A \times 1{,}008 - B$

Bấm rh nhập D = 1,B = 200 000, A = 13 800 000

Bấm 200000=13800000=

Bấm = liên tiếp khi D = 21 (ứng với tháng thứ 21 phải trả góp xong còn nợ: 813 358 đồng)

Bấm tiếp = thì D = 22 ⇔ A âm.

Như vậy: chỉ cần góp trong 22 tháng thì hết nợ. Tháng cuối chỉ cần góp:

813 358 ×1,008 = 819 865 (đồng)

Vậy số tháng cần trả góp: 22 tháng, tháng cuối chỉ cần góp: 819 865 (đồng)

Bài 2 : Trích đề thi giải toán trên MTCT lớp 9 tỉnh Hậu Giang năm 2011-2012

Một người được lĩnh lương khởi điểm là 700.000đ/tháng. Cứ ba năm anh ta lại được tăng lương thêm 7%. Hỏi sau 36 năm làm việc anh ta được lĩnh tất cả bao nhiêu tiền (Lấy chính xác đến hàng đơn vị).

Giải trên máy tính CASIO fx-570VN PLUS

Từ đầu năm thứ 1 đến hết năm thứ 3, anh ta nhận được : $u_1 = 700.000\text{x}36$ đ

Từ đầu năm thứ 4 đến hết năm thứ 6, anh ta nhận được : $u_2 = 700.000(1+7\%)\text{x}36$ đ

Từ đầu năm thứ 7 đến hết năm thứ 9, anh ta nhận được : $u_3 = 700.000(1+7\%)^2\text{x}36$ đ

…………..

Từ đầu năm thứ 34 đến hết năm thứ 36, anh ta nhận được : $u_{12} = 700.000(1+7\%)^{11}\text{x}36$ đ

Vậy sau 36 năm anh ta nhận được tổng số tiền là :

$u_1 + u_2 + u_3 + ... + u_{12} =$

Ghi vào màn hình $D = D + 1 : A = A(1+7\%) : C = C + A$

Bấm r nhập D=1 bấm 1=

Nhập A=25200000 bấm 25200000=

Nhập C=25200000 bấm 25200000=

Bấm=đến khi D=12

Bấm tiếp = được $A = 53042269{,}2$

Bấm tiếp = được $C = 450788972$

Vậy sau 36 năm làm việc anh ta được lĩnh tất cả 450788972 đ

Bài 3 : Trích đề thi giải toán trên MTCT lớp 12 GDTX tỉnh Lạng Sơn năm 2012-2013

Theo dự báo với mức tiêu thụ dầu không đổi như hiện nay thì trữ lượng dầu của nước A sẽ hết sau 100 năm nữa. Nhưng do nhu cầu thực tế, mức tiêu thụ tăng lên 4% mỗi năm. Hỏi sau bao nhiêu năm số dầu dự trữ của nước A sẽ hết.

Giải trên máy tính CASIO fx-570VN PLUS

Gọi mức tiêu thụ dầu hàng năm của nước A theo dự báp là M thì lượng dầu của nước A là 100A

Mức tiêu thụ dầu theo thực tế:

Gọi x_n là lượng dầu tiêu thụ năm thứ n

Năm thứ 2 là $x_2 = M + 4\%M = M(1+4\%) = 1,04M$

Năm thứ n là $x_n = 1,04^{n-1}M$

Tổng lượng dầu tiêu thụ trong n năm là:

$$x_1 + x_2 + x_3 + ... + x_n = M + 1,04M + 1,04^2M + ... + 1,04^{n-1}M$$

$$\Rightarrow (1 + 1,04 + 1,04^2 + ... + 1,04^{n-1})M = 100M$$

$$\Leftrightarrow 1 + 1,04 + 1,04^2 + ... + 1,04^{n-1} = 100$$

$$\Leftrightarrow \frac{1,04^n - 1}{0,04} = 100$$ (cấp số nhân lớp 11)

Giải phương trình bằng lệnh SOLVE

Ghi vào màn hình $\frac{1,04^X - 1}{0,04} = 100$

Bấm qr nhập X=20 bấm 20= được $n = x \approx 41,0354$

Vậy sau 41 năm lượng dầu dự trữ của nước A sẽ sử dụng hết.