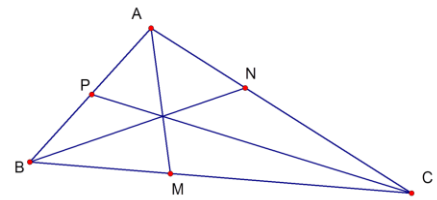
MỘT SỐ BÀI TOÁN VỀ HÌNH HỌC HAY CÓ TRONG ĐỀ THI HSG CASIO

A. Một số công thức hay sử dụng:

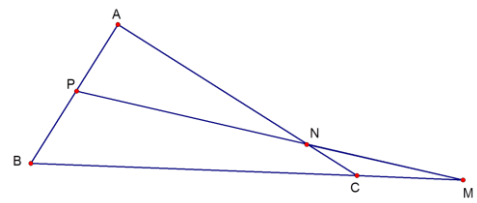
a) Định lý Pitago $a^2 = b^2 + c^2$



b) Định lý Ceva: AM, BN, CP đồng quy

$$\frac{\overline{MB}}{\overline{NC}}.\frac{\overline{NC}}{\overline{NA}}.\frac{\overline{PA}}{\overline{PB}} = -1$$

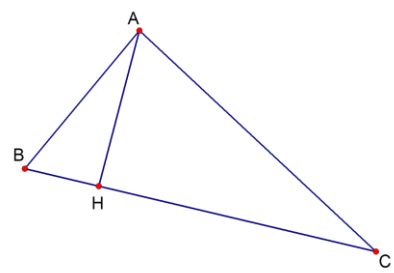
c) Định lý Mencleit: M, N, P thẳng hàng



$$\frac{\overline{MB}}{\overline{NC}}.\frac{\overline{NC}}{\overline{NA}}.\frac{\overline{PA}}{\overline{PB}} = 1$$

d) Công thức lượng giác:

*) Tam giác vuông:



$BA^2=BH.BC$

$BC^2=AC^2+AB^2$

$AH^2=HB.HC$

$$\frac{1}{AH^2} = \frac{1}{AB^2} + \frac{1}{AC^2}$$

*) Tam giác thường:

- Trung tuyến: $AM^2 = \frac{1}{2}(AB^2 + AC^2) - \frac{BC^2}{4}$

- Định lý hàm số Sin: $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R$

- Định lý hàm số Cosin: $a^2 = b^2+c^2-2bc\cos A$

- Diện tích: $S = \frac{1}{2}ah_a = \frac{1}{2}ab\sin C = pr = \frac{abc}{4R} = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$

diendanmaytinh

- Đường phân giác: $l_a = \dfrac{2bc\cos\dfrac{A}{2}}{b+c}$

*) Tam giác đều: Diện tích, chiều cao: S= $\dfrac{a^2\sqrt{3}}{4}; h_a = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$

*) Diện tích hình quạt: $S = \dfrac{\Pi R^2\alpha}{360^0}$

e) Diện tích, thể tích:

- Hình chóp: $V = \dfrac{1}{3}Bh$

- Hình nón: $V = \dfrac{1}{3}\Pi R^2 h; S_{xq} = \Pi Rl$

- Hình chóp cụt: $V = \dfrac{1}{3}(B + \sqrt{BB'} + B')h$

- Hình nón cụt: $V = \dfrac{1}{3}\Pi(R^2 + RR' + R'^2)h; S_{xq} = \Pi(R+R')l$

- Hình cầu: $V = \dfrac{4}{3}\Pi R^3; S_{xq} = 4\Pi R^2$

- Hình trụ: $V = \Pi R^2 h; S_{xq} = 2\Pi Rh$

- Hình chỏm cầu: $V = \Pi h^2(R - \dfrac{h}{3}); S = 2\Pi Rh$

B. Một số dạng toán:

1. Hệ thức lượng giác trong tam giác.

VD1: Cho tam giác ABC biết AB =5dm; BC = 4dm; CA=8dm tính các góc.

ĐS: $A \approx 24^0 8'49''; B \approx 125^0 5'59''; C \approx 30^0 45'12''$

VD2: Cho tam giác ABC biết AB =5dm; AC = 4dm; góc A=$46^0$34’25”

1. Tính chu vi. ĐS: 2p $\approx$12,67466dm

2. Tính gần đúng diện tích đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC

ĐS: S $\approx$20,10675dm^2.

diendanmaytinhcamtay.vn

VD3: Cho tam giác ABC biết AB =6dm; góc A=$84^0$13’38”;B=$34^0$51’33”.

Tính diện tích tam giác. ĐS: S $\approx$20,49315dm^2.

VD4: Tính diện tích tam giác ABC biết A(8; -3); B(-5; 2); C(5; 7).

Tính diện tích tam giác. ĐS: S = 75,7 ĐVDT.

VD5: Tính diện tích tứ giác ABCD biết A(-3; 4); B(2; 3); C($\sqrt{2}$;5); D(-4;-3).

S $\approx$37,46858 ĐVDT.

VD6: Tính gần đúng diện tích và chu vi của đa giác 50 cạnh nội tiếp đường tròn bán kính 1dm. ĐS: S $\approx$3,13333 dm^2. C$\approx$6,27905dm

VD7: Cho tam giác ABC có AB = 8 cm; BC = 7 cm; CA = 5 cm. Vẽ 3 đường cao AA’; BB’; CC’. Tính diện tích tam giác A’B’C’.

HD: $\frac{S'}{S}$ = 1-($\cos^2$A+$\cos^2$B+$\cos^2$C)=2cosAcosBcosC = 1,9441cm^2.

2. Hệ thức lượng trong đường tròn.

VD: Hai dây cung AB và CD cắt nhau tại I nằm trong đường tròn (O). Tính IA, IB biết IC = 15, 3cm; ID = 17,5 cm; AB = 34,7cm.

HD: $\begin{cases} IA.IB = IC.ID \\ IA + IB = AB \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} IA = 11{,}6cm \\ IB = 23{,}1cm \end{cases}$

3. Đường thẳng:

VD: D1: 2x -3y-1=0

D2: 5x-2y+4 =0. Tìm giao và góc giữa 2 đường thẳng này.

ĐS: (-14/11; -13/11) và cos(D1; D2) = $34^0$30’30”

4. Một số bài toán về tam giác.

VD1

Tam giác nhỏ hơn

Cho tam giác ABC (có ba góc nhọn A, B, C cho chắc) có ba cạnh là a, b, c

1 .- Vẽ ba phân giác AA’, BB’, CC’. Tính diện tích S’ tam giác A’B’C’,

2 . - Vẽ ba đường cao AA”, BB”, CC”. Tính diện tích S” tam giác A”B”C”.

Giải

diendanmaytinhcamtay.vn

$BC = a,\ AC = b,\ AB = c$

Ta có công thức tính diện tích tam giác: $S_{ABC} = \frac{1}{2}ah_a = \frac{1}{2}a(b.\sin C) = \frac{1}{2}ab\sin C$

(sẽ áp dụng ở phần sau)

Theo tính chất đường phân giác trong tam giác (SGK lớp 8):

$$\frac{BA_1}{CA_1} = \frac{BA}{CA} = \frac{c}{b} \Leftrightarrow \frac{BA_1}{CA_1} + 1 = \frac{c}{b} + 1 \Leftrightarrow \frac{BC}{CA_1} = \frac{b+c}{b} \Leftrightarrow CA_1 = \frac{ab}{b+c}$$

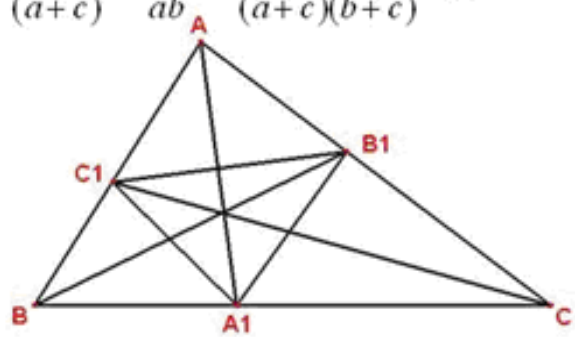
Tương tự $CB_1 = \frac{ab}{a+c}$

Từ đó suy ra:

$$S_{CA_1B_1} = \frac{1}{2} \times CA_1 \times CB_1 \times \sin C = \frac{1}{2} \times \frac{ab}{(b+c)} \times \frac{ab}{(a+c)} \times \frac{S_{ABC}}{ab} = \frac{S_{ABC} \times ab}{(a+c)(b+c)} \quad (1)$$

$$S_{AB_1C_1} = \frac{S_{ABC} \times bc}{(a+c)(a+b)} \quad (2)$$

Tương tự: $S_{BC_1A_1} = \frac{S_{ABC} \times ac}{(a+b)(b+c)} \quad (3)$



Từ (1), (2), (3) suy ra:

$$S_{A_1B_1C_1} = S_{ABC} - S_{CA_1B_1} - S_{AB_1C_1} - S_{BC_1A_1} =$$

$$= S_{ABC} - \frac{S_{ABC} \times ab}{(a+c)(b+c)} - \frac{S_{ABC} \times bc}{(a+c)(a+b)} - \frac{S_{ABC} \times ac}{(a+b)(b+c)} =$$

$$= S_{ABC} \times \left(1 - \frac{ab}{(a+c)(b+c)} - \frac{bc}{(a+c)(a+b)} - \frac{ac}{(a+b)(b+c)}\right) =$$

$$= \frac{S_{ABC} \times 2abc}{(a+b)(b+c)(a+c)}$$

Vậy $S' = \frac{2abcS}{(a+b)(b+c)(c+a)}$ (đpcm)

Có thể chứng minh được: $\triangle AB_2C_2 \sim \triangle ABC$

$$\Rightarrow \frac{S_{\triangle AB_2C_2}}{S_{\triangle ABC}} = \left(\frac{AB_2}{AB}\right)^2 = \cos^2 A$$

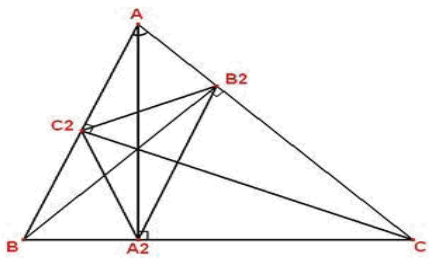
$$\Rightarrow S_{\triangle AB_2C_2} = S_{\triangle ABC} \times \cos^2 A \qquad (1)$$

Tương tự: $S_{\triangle BC_2A_2} = S_{\triangle ABC} \times \cos^2 B \qquad (2)$

$S_{\triangle CA_2B_2} = S_{\triangle ABC} \times \cos^2 C \qquad (3)$

Từ (1), (2), (3) suy ra:

$$S_{\triangle A_2B_2C_2} = S_{\triangle ABC} - (S_{\triangle AB_2C_2} + S_{\triangle BC_2A_2} + S_{\triangle CA_2B_2})$$
$$= S_{\triangle ABC}[1-(\cos^2 A + \cos^2 B + \cos^2 C)]$$



$$1-(\cos^2 A + \cos^2 B + \cos^2 C)$$
$$= 1-[\cos^2 A + \frac{1}{2}(1+\cos 2B + 1 + \cos 2C)]$$
$$= 1-[\cos^2 A + 1 + \cos(B+C).\cos(B-C)]$$
$$= -\cos^2 A - \cos(B+C).\cos(B-C)$$
$$= -\cos^2 A + \cos A.\cos(B-C)$$
$$= \cos A.[\cos(B-C) - \cos A]$$
$$= \cos A.[\cos(B-C) + \cos(B+C)]$$
$$= 2.\cos A.\cos B.\cos C$$

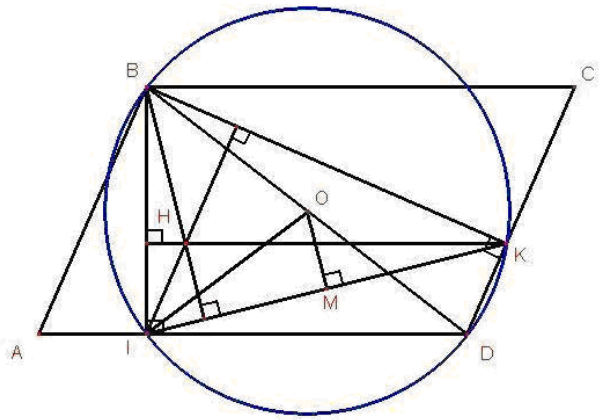
Vậy $S_{\triangle A_2B_2C_2} = S_{\triangle ABC}.(2.\cos A.\cos B.\cos C)$

Hay $S'' = 2.S.\cos A.\cos B.\cos C$ (đpcm).

(Các công thức lượng giác có thể tham khảo thêm SGK Đại Số 10 Nâng cao trang 208)

VD2: Từ đỉnh B của hình bình hành ABCD kẻ các đường cao BK, BI vuông góc với CD và AD. Gọi H là trực tâm của tam giác BIK. Tính BH biết BD = 17 cm; IK = 15 cm.

diendanmay



Tứ giác BIDK là tứ giác nội tiếp đường tròn tâm O đường kính BD=17 cm

Xét tam giác BIK có H là trực tâm, điểm O – trung điểm của BD là tâm đường tròn ngoại tiếp.

Dễ dàng chứng minh được BH=2.OM

Áp dụng định lý Pytago vào tam giác IMO:

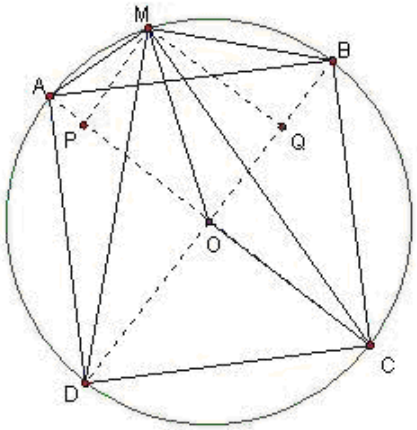
$$OI^2 = MO^2 + MI^2$$

Suy ra :

$$BH = 2\times OM = 2\times\sqrt{OI^2 - MI^2} = 2\times\sqrt{\left(\frac{17}{2}\right)^2 - \left(\frac{15}{2}\right)^2} = 8\ (cm)$$

VD3: Cho hình vuông ABCD nội tiếp (O,12). Một điểm M bất kì thuộc (O). Tính $MA^4+MB^4+MC^4+MD^4$ chính xác đến 3 chữ số thập phân.

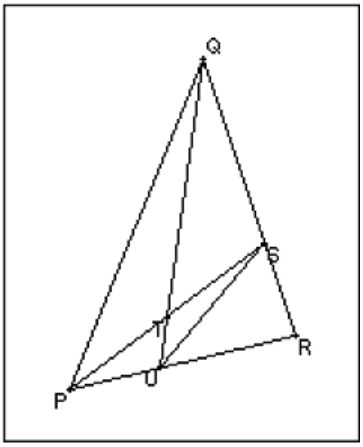
diendanmaytinh.vn



$$MA^4 + MB^4 + MC^4 + MD^4 =$$

$$= (MA^2 + MC^2)^2 + (MB^2 + MD^2)^2 - 2[(MA.MC)^2 + (MB.MD)^2]$$
$$= (AC^4 + BD^4) - 2[(MP.AC)^2 + (MQ.BD)^2]$$
$$= 32R^4 - 8R^2.(MP^2 + MQ^2) = 32R^4 - 8R^2.MO^2$$
$$= 32R^4 - 8R^4 = 24R^4 = 24.12^4$$

VD4: Cho tam giác PQR, gọi S là 1 điểm thuộc cạnh QR, U là 1 điểm thuộc cạnh PR, giao điểm của PS và QU là T. Cho biết PT = TS , QS = 2 RS và diện tích tam giác PQR là 150. Tính diện tích tam giác PSU.



Giải

S(PSR)=S(PQR)/3=50
Vẽ SK (không có trong hình) song song

với QU (K thuộc PR)

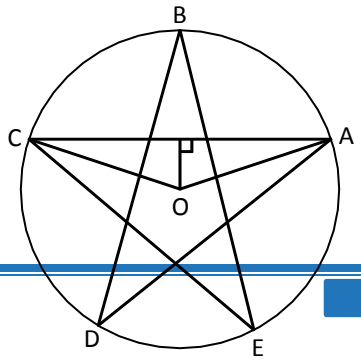
=>RK=RU/3, PU=PK

=> PU=2/5*PR

=>S(PSU)=2/5*S(PSR)=20 (dvdt)

5. Một số bài toán về Đa giác và hình tròn

Bài 5.1 (Sở GD & ĐT Đồng Nai, 1998, vòng Tỉnh, cấp PTTH & PTCS)



Một ngôi sao năm cánh có khoảng cách giữa hai đỉnh không liên tiếp là $9,651\,cm$. Tìm bán kính đường tròn ngoại tiếp (qua 5 đỉnh).

Giải: Ta có công thức tính khoảng cách

giữa hai đỉnh không kề nhau của ngôi sao năm cánh đều (hình vẽ):

$AC = d = 2R\cos 18^o = \dfrac{R\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{2}$. Công thức $d = 2R\cos 18^o$ là hiển nhiên.

Công thức $\cos 18^o = \dfrac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{2}$ có thể chứng minh như sau:

Ta có: $1-\sin^2 18^o = \cos^2 18^o = \dfrac{1+\cos 36^o}{2} = \dfrac{1+\sin 54^o}{2} = \dfrac{1+3\sin 18^o - 4\sin^3 18^o}{2}$.

hay $4\sin^3 18^o - 2\sin^2 18^o - 3\sin 18^o + 1 = 0.$.

Suy ra $\sin 18^o$ là nghiệm của phương trình: $4x^3 - 2x^2 - 3x + 1 = (x-1)(4x^2+2x-1) = 0$.

Vậy $\sin 18^o = \dfrac{-1+\sqrt{5}}{4}$. Từ đây ta có: $\cos^2 18^o = 1-\sin^2 18^o = 1-(\dfrac{\sqrt{5}-1}{4})^2 = \dfrac{10+2\sqrt{5}}{16}$.

hay $\cos 18^o = \sqrt{\dfrac{10+2\sqrt{5}}{16}} = \dfrac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}$.

Suy ra $d = 2R\cos 18^o = \dfrac{R\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{2}$ và $R = \dfrac{d}{2\cos 18^o} = \dfrac{2d}{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}$.

Cách giải 1: 9.651 $\boxed{\div}$ 2 $\boxed{\div}$ 18 $\boxed{o,,,}$ $\boxed{\cos}$ $\boxed{=}$ (5.073830963)

Cách giải 2: 2 $\boxed{\times}$ 9.651 $\boxed{\div}$ $\boxed{[(}$ $\boxed{[(}$ 10 $\boxed{+}$ 2 $\boxed{\times}$ 5 $\boxed{\sqrt{}}$ $\boxed{)]}$ $\boxed{\sqrt{}}$ $\boxed{=}$ (5.073830963)

Đáp số: 5,073830963.

Bài 5.2 (Sở GD & ĐT TP Hồ Chí Minh, 1996, vòng 1)

Tính khoảng cách giữa hai đỉnh không liên tiếp của một ngôi sao 5 cánh nội tiếp trong đường tròn bán kính $R = 5,712cm$.

Cách giải 1: Ta có công thức tính khoảng cách giữa hai đỉnh không kề nhau của ngôi sao năm cánh (xem hình vẽ và chứng minh bài 5.1):

$$d = 2R\cos 18^o = \frac{R\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{2}.$$

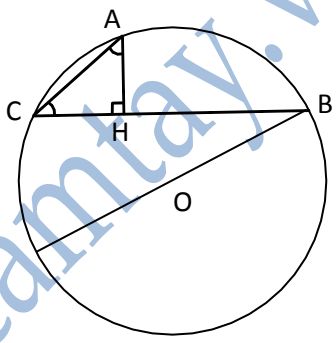
diendanmaytinhcamtay.vn

Tính: MODE 4 2 × 5.712 × 18 o,,, cos = (10.86486964)

Cách giải 2: 10 + 2 × 5 √ = √ = × 5.712 = ÷ 2 = (10,86486964)

Đáp số: 10,86486964.

Bài 5.3. Cho đường tròn tâm O, bán kính $R = 11,25\,cm$. Trên đường tròn đã cho, đặt các cung $AB = 90^o$, $BC = 120^o$ sao cho A và C nằm cùng một phía đối với BO.



a) Tính các cạnh và đường AH của tam giác ABC.

b) Tính diện tích tam giác ABC

Giải: a) Theo hình vẽ:

sđ AC = sđ BC - sđ AB = 120^0 - 90^0 = 30^0.

Tính các góc nội tiếp ta được:

ABC = 15^0; ACB = 45^0. Suy ra: BAC = 120^0; CAH = 45^0; BAH = 75^0.

Ta có: $AB = R\sqrt{2}$; $BC = R\sqrt{3}$. Vì ΔAHC vuông cân, nên $AH = HC$ (đặt $AH = x$).

Theo định lí Pitago ta có: $AH^2 = AB^2 - HB^2$.

Do đó: $x^2 + \left(R\sqrt{3} - x\right)^2 = \left(R\sqrt{2}\right)^2$ hay $2x^2 - 2R\sqrt{3}x + R^2 = 0$.

Suy ra: $x_1 = \dfrac{R\sqrt{3} - R}{2}$; $x_2 = \dfrac{R\sqrt{3} + R}{2}$. Vì $AH < AC < R$, nên nghiệm $x_2 = \dfrac{R\sqrt{3} + R}{2}$ bị loại.

Suy ra: $AC = AH\sqrt{2} = \dfrac{R(\sqrt{3} - 1)}{\sqrt{2}}$.

Gọi diện tích ΔABC là S, ta có:

$$S = \frac{1}{2}AH \cdot BC = \frac{1}{2} \cdot \frac{R\sqrt{3} - R}{2} \cdot R\sqrt{3} = \frac{R^2(3 - \sqrt{3})}{4}.$$

Ấn phím: 11.25 Min × 2 √ = MODE 7 2 (15.91) Vậy $AB \approx 15,91\,cm$.

diendanmaytinhcamtay.vn

Ấn tiếp phím: MR × 3 √ = *Kết quả*:19.49 Vậy: $BC \approx 19,49\ cm$.

Ấn phím: MR × [(3 √ − 1 = ÷ 2 √ = (5.82) Vậy $AC \approx 5,82\ cm$.

Ấn tiếp phím: MR × [(3 √ − 1 = ÷ 2 = (4.12) Vậy: $AH \approx 4,12\ cm$.

Ấn tiếp phím: MR SHIFT x^2 × [(3 − 3 √ = ÷ 4 = *Kết quả*: $S \approx 40,12\ cm^2$.

Bài 5.4. (Thi trắc nghiệm học sinh giỏi toán toàn nước Mỹ, 1972) Cho hình vuông $ABCD$ cạnh bằng 12. Vẽ đoạn AE với E là điểm trên cạnh CD và $DE = 5\ cm$. Trung trực của AE cắt AE, AD và BC tại M, P và Q. Tỷ số độ dài đoạn PM và MQ là:

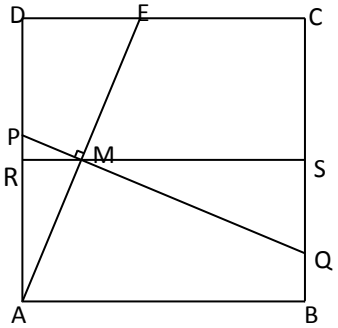
(A) 5:12; (B) 5:13; (C) 5:19; (D) 1:4; (E) 5:21.

Giải: Vẽ *RS* qua *M* song song với cạnh *AB,CD*.

Ta có: $\frac{MP}{MQ} = \frac{MR}{MS}$. Vì *RM* là đường trung bình của tam giác *ADE* nên $MR = \frac{DE}{2}$.

Mà: $MS = RS - MR$.

Vậy: $\frac{MP}{MQ} = \frac{MR}{MS} = \frac{\frac{DE}{2}}{RS - \frac{DE}{2}}$.

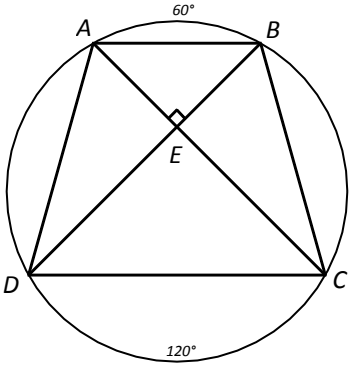


Áp dụng bằng số với $DE = 5\ cm,\ RS = 12\ cm$:

5 $a^{b/c}$ 2 = Min ÷ [(12 − MR = ($\frac{5}{19}$)

Đáp số

Bài 5.5. Trên đường tròn tâm O, bán kính $R = 15,25\ cm$, người ta đặt các cung liên tiếp: AB = 60^0, BC = 90^0, CD = 120^0.



a) Tứ giác $ABCD$ là hình gì?

b) Chứng minh $AC \perp BD$.

c) Tính các cạnh và đường chéo của $ABCD$ theo R chính xác đến 0,01.

d) Tính diện tích tứ giác $ABCD$.

Giải: a) sđ AD = 360^0 - (sđ AB + sđ BC + sđ CD)
= 360^0 - (60^0 + 90^0 + 120^0) = 90^0.

Suy ra: AD = BC, ABD = BDC = 45^0 (vì cùng bằng $\frac{90^0}{2}$).

diendanmaytinhcamtay.vn

Từ đó ta có: $AB // CD$. Vậy $ABCD$ là hình thang.

Mặt khác, $ADB = BCD$ (cùng bằng $\frac{60^0+90^0}{2}$).Vậy $ABCD$ là hình thang cân (đpcm).

b) Vì $ABD = BAC = 45^0$ (vì cùng bằng $\frac{90^0}{2}$).

Suy ra $AEB = 90^0$, vậy $AC \perp BD$ (đpcm).

c) Theo cách tính cạnh tam giác đều, tứ giác đều, lục giác đều nội tiếp trong đường tròn bán kính R, ta có:

$$AB = R;\quad AD = BC = R\sqrt{2};\quad DC = R\sqrt{3}.$$

Các tamgiác AEB, CED vuông cân, suy ra $AE = \frac{AB}{\sqrt{2}}$, $CE = \frac{CD}{\sqrt{2}}$.

Vậy: $AE = \frac{R}{\sqrt{2}}$, $CE = \frac{R\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$. Suy ra $AC = AE + EC = \frac{R+R\sqrt{3}}{\sqrt{2}} = \frac{R(1+\sqrt{3})}{\sqrt{2}}$.

d) $S_{ABCD} = \frac{1}{2}AC \cdot DB = \frac{1}{2}AC^2 = \frac{1}{2}\cdot\frac{R^2(1+\sqrt{3})^2}{2} = \frac{R^2(1+\sqrt{3})^2}{4} = [\frac{R(1+\sqrt{3})}{2}]^2$.

Tính: [MR] [×] [(] 1 [+] 3 [√] [=] [÷] 2 [=] [SHIFT] [x^2] [MODE] [7] [2] (433.97).

Vậy $S_{ABCD} \approx 433,97$ cm^2.

Ấn tiếp: 15.25 [Min] [×] 2 [√] [=] *Kết quả*: 21.57

Vậy $AD = BC \approx 21,57$ cm.

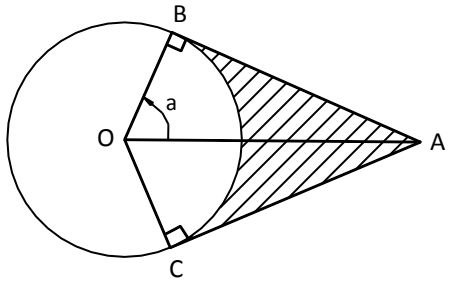
Ấn tiếp phím: [MR] [×] 3 [√] [=] (26.41) Vậy: $CD \approx 26,41\,cm$.

Ấn tiếp phím: [MR] [×] [(] 1 [+] 3 [√] [=] [÷] 2 [√] [=] (29.46)

Vậy $AC = BD \approx 29,46\,cm$.

Bài 5.6. Cho đường tròn tâm O, bán kính $R = 3,15\,cm$. Từ một điểm A ở ngoài đường tròn vẽ hai tiếp tuyến AB và AC (B, C là hai tiếp điểm thuộc (O)). Tính diện tích phần mặt phẳng giới hạn bởi hai tiếp tuyến và cung tròn nhỏ BC biết rằng $AO = a = 7,85\,cm$ (chính xác đến 0,01 cm).

Giải: Ta có: $\cos\alpha = \frac{OB}{OA} = \frac{R}{a} = \frac{3,15}{7,85}$.



$S_{ABOC} = 2S_{AOB} = a.R.\sin\alpha$; $S_{\text{quạt OBC}} = \frac{\pi R^2.2\alpha}{360} = \frac{\pi R^2\alpha}{180}$.

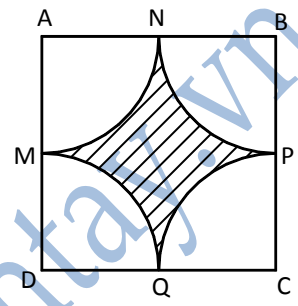
diendanmaytinhcamtay.vn

$S_{\text{gạch xọc}} = S_{\text{ABOC}} - S_{\text{quạt OBC}} = aR\sin\alpha - \dfrac{\pi R^2\alpha}{180}$.

Tính trên máy: 3.15 ÷ 7.85 = SHIFT cos^{-1} SHIFT °'" Min sin ×

7.85 × 3.15 − SHIFT π × 3.15 SHIFT x^2 × MR ÷ 180 = (11.16)

Đáp số: $S_{\text{gạch xọc}} = 11{,}16\ \text{cm}^2$.



Bài 5.7. Tính diện tích hình có 4 cạnh cong (hình gạch sọc) theo cạnh hình vuông a = 5,35 chính xác đến 0,0001cm.

Giải: Diện tích hình gạch xọc $MNPQ$ (S_{MNPQ}) bằng diện tích hình vuông $ABCD$ (S_{ABCD}) trừ đi 4 lần diện tích của $\frac{1}{4}$ hình tròn bán kính $R = \frac{a}{2}$.

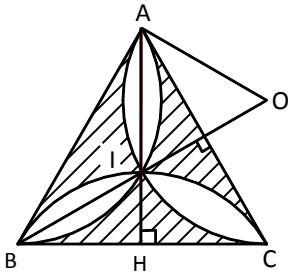
$$S_{MNPQ} = a^2 - 4\frac{\pi R^2}{4} = a^2 - \frac{\pi a^2}{4} = \frac{a^2(4-\pi)}{4} = \frac{5{,}35^2(4-\pi)}{4}.$$

Ấn phím: 5.35 SHIFT x^2 × [(4 − π = ÷ 4 = MODE 7 2 (6.14)

Kết luận: $S_{MNPQ} \approx 6{,}14\ \text{cm}^2$.

Bài 5.8. Tính diện tích phần hình phẳng (phần gạch xọc) giới hạn bởi các cung tròn và các cạnh của tam giác đều *ABC* (xem hình vẽ), biết: $AB = BC = CA = a = 5{,}75\ cm$.

Giải: $R = OA = OI = IA = \frac{2}{3}AH = \frac{2}{3}\cdot\frac{a\sqrt{3}}{2}$.*Suy ra*: $R = \frac{a\sqrt{3}}{3}$ *và* $AOI = 60^0$.



Diện tích hình gạch xọc bằng diện tích tam giác ABC trừ diện tích hình hoa 3 lá (gồm 6 hình viên phân có bán kính R và góc ở tâm bằng 60^0).

$$S_{\Delta ABC} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}; \quad S_{\Delta O_1AI} = \frac{R^2\sqrt{3}}{4} = \left(\frac{a\sqrt{3}}{3}\right)^2\cdot\frac{\sqrt{3}}{4} = \frac{a^2\sqrt{3}}{12}.$$

diendanmaytinhcamtay.vn

Diện tích một viên phân: $\frac{\pi R^2}{6}-\frac{R^2\sqrt{3}}{4}=\frac{R^2}{2}\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=\frac{R^2(2\pi-3\sqrt{3})}{12}$.

Tính theo *a*, diện tích một viên phân bằng: $\frac{a^2(2\pi-3\sqrt{3})}{36}$;

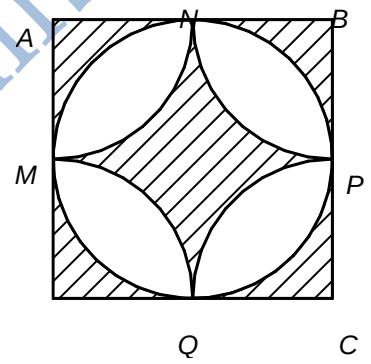
$S_{\text{gạch xọc}}=\frac{a^2\sqrt{3}}{4}-6\cdot\frac{a^2(2\pi-3\sqrt{3})}{36}=\frac{a^2(9\sqrt{3}-4\pi)}{12}$; $S_{\text{gạch xọc}}=\frac{5,75^2(9\sqrt{3}-4\pi)}{12}$.

Bấm tiếp: 5,75 [SHIFT] [x^2] [×] [(] 9 [×] 3 [√] [−] 4 [×] [SHIFT] [π] [)] [÷] 12 [=]

Kết quả: $S_{\text{gạch xọc}}\approx 8,33$ cm^2.

Bài 5.9. Viên gạch cạnh $a=30\,cm$ có hoa văn như hình vẽ .

a) Tính diện tích phần gạch xọc của hình đã cho, chính xác đến 0,01 cm.
b) Tính tỉ số phần trăm giữa diện tích phần gạch xọc và diện tích viên gạch.



Giải: a) Gọi R là bán kính hình tròn.
Diện tích S một hình viên phân bằng:

$S=\frac{\pi R^2}{4}-\frac{R^2}{2}=\frac{R^2}{4}(\pi-2)=\frac{a^2}{16}(\pi-2)$.

Vậy diện tích hình gồm 8 viên phân bằng $\frac{a^2}{2}(\pi-2)$.

Diện tích phần gạch xọc bằng: $a^2-\frac{a^2(\pi-2)}{2}=\frac{a^2(4-\pi)}{2}$.

Tính trên máy: 30 [SHIFT] [x^2] [Min] [×] [(] 4 [−] [SHIFT] [π] [)] [÷] 2 [=]

[MODE] [7] [2] (386,28) Vậy $S_{\text{gạch xọc}}\approx 386,28$ cm^2.

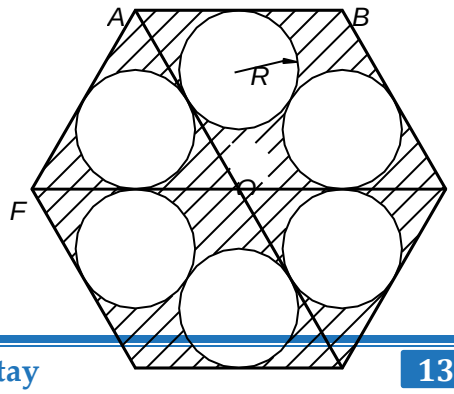
Ấn phím tiếp: [÷] [MR] [SHIFT] [%] (42.92)

Tỉ số của diện tích phần gạch xọc và diện tích viên gạch là 42,92%.

Đáp số: 386,28 cm^2; 42,92 %.

Bài 5.10. Nhân dịp kỷ niệm 990 năm Thăng Long, người ta cho lát lại đường ven hồ Hoàn Kiếm bằng các viên gạch hình lục giác đều.

Dưới đây là viên gạch lục giác đều có 2 mầu (các hình tròn cùng một mầu, phần còn lại là mầu khác).



diendanmaytinhcamtay.vn

Hãy tính diện tích phần gạch cùng

mầu và tỉ số diện tích giữa hai phần đó, biết rằng $AB = a = 15\ cm$.

Giải: Bán kính đường tròn nội tiếp tam giác đều là: $R = \frac{1}{3}\cdot\frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{a\sqrt{3}}{6}$.

Diện tích mỗi hình tròn là: $\pi R^2 = \frac{\pi a^2}{12}$. Diện tích 6 hình tròn là: $\frac{\pi a^2}{2}$.

Tính trên máy: 15 $\boxed{\text{SHIFT}}$ $\boxed{x^2}$ $\boxed{\times}$ $\boxed{\pi}$ $\boxed{\div}$ 2 $\boxed{=}$ $\boxed{\text{Min}}$ (353.4291)

Diện tích toàn bộ viên gạch là: $6\cdot\frac{a^2\sqrt{3}}{4} = \frac{3a^2\sqrt{3}}{2}$.

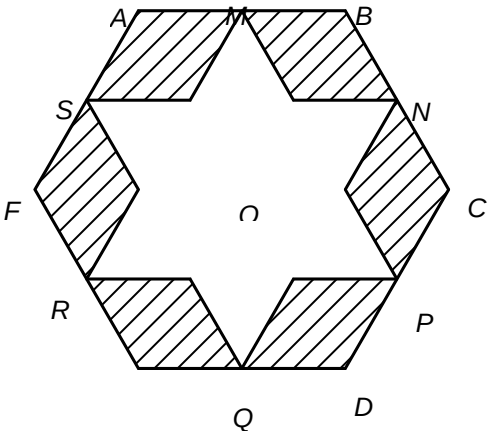
Diện tích phần gạch xọc là: $\frac{3a^2\sqrt{3}}{2} - \frac{\pi a^2}{2}$.

Bấm tiếp phím: 3 $\boxed{\times}$ 15 $\boxed{\text{SHIFT}}$ $\boxed{x^2}$ $\boxed{\times}$ 3 $\boxed{\sqrt{\ }}$ $\boxed{\div}$ $\boxed{=}$ $\boxed{-}$ $\boxed{\text{MR}}$ $\boxed{=}$ (231.13797)

Ấn tiếp phím: $\boxed{\div}$ $\boxed{\text{MR}}$ $\boxed{\text{SHIFT}}$ $\boxed{\%}$ *Kết quả*: 65.40

Đáp số: 353,42 cm^2 (6 hình tròn); 231,14 cm^2 (phần gạch xọc); 65,40 %

Bài 5.11. Viên gạch hình lục giác đều ABCDEF có hoa văn hình sao như hình vẽ, trong đó các đỉnh hình sao M, N, P, Q, R, S là trung điểm các cạnh của lục giác. Viên gạch được tô bằng hai mầu (mầu của hình sao và mầu của phần còn lại). Biết rằng cạnh của lục giác đều là a = 16,5 cm. Tính diện tích mỗi phần (chính xác đến 0,01). Tính tỉ số phần trăm giữa hai diện tích đó.



Giải: Diện tích lục giác $ABCDEF$ bằng:

$S_1 = 6\cdot\frac{a^2\sqrt{3}}{4} = \frac{3a^2\sqrt{3}}{2}$.

Lục giác nhỏ có cạnh là $b = \frac{a}{2}$,

6 cánh sao là các tam giác đều cũng

có cạnh là $b = \frac{a}{2}$. Từ đó suy ra:

diendanmaytinhcamtay.vn

Diện tích lục giác đều cạnh b là S_2 bằng: $S_2 = \frac{3b^2\sqrt{3}}{2} = \frac{3a^2\sqrt{3}}{8}$.

Diện tích 6 tam giác đều cạnh b là S_3: $S_3 = \frac{3a^2\sqrt{3}}{8}$. *Tính trên máy*: 3 × 16.5 SHIFT x^2 × 3 √ ÷ 8 × 2 = MODE 7 2 (353.66) Min

Ấn tiếp phím: 3 × 16,5 SHIFT x^2 × 3 √ ÷ 2 = − MR = (353.66)

Ấn tiếp phím: ÷ MR SHIFT % *Kết quả*: 100.

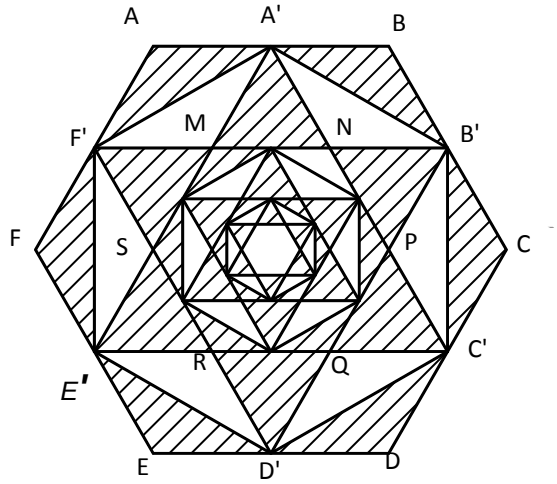
Vậy diện tích hai phần bằng nhau.

Lời bình: Có thể chứng minh mỗi phần có 12 tam giác đều bằng nhau, do đó diện tích hai phần bằng nhau. Từ đó chỉ cần tính diện tích lục giác đều và chia đôi.

Bài 5.12. Cho lục giác đều cấp 1 $ABCDEF$ có cạnh $AB = a = 36\ mm$. Từ các trung điểm của mỗi cạnh dựng một lục giác đều $A'B'C'D'E'F'$ và hình sao 6 cánh cũng có đỉnh là các trung điểm A', B', C', D', E', F' (xem hình vẽ). Phần trung tâm của hình sao là lục giác đều cấp 2 $MNPQRS$. Với lục giác này ta lại làm tương tự như đối với lục giác ban đầu $ABCDEF$ và được hình sao mới và lục giác đều cấp 3. Đối với lục giác cấp 3, ta lại làm tương tự như trên và được lục giác đều cấp 4. Đến đây ta dừng lại. Các cánh hình sao cùng được tô bằng một mầu (gạch xọc), còn các hình thoi trong hình chia thành 2 tam giác và tô bằng hai mầu: mầu gạch xọc và mầu "trắng". Riêng lục giác đều cấp 4 cũng được tô mầu trắng.

a) Tính diện tích phần được tô bằng mầu "trắng" theo a.

b) Tính tỉ số phần trăm giữa diện tích phần "trắng" và diện tích hình lục giác ban đầu.



Giải: a) Chia lục giác thành 6 tam giác đều có cạnh là a bằng 3 đường chéo đi qua 2 đỉnh đối xứng qua tâm, từ đó ta có $S = 6 \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{4} = \frac{3a^2\sqrt{3}}{2}$.

Chia lục giác $ABCDEF$ thành

diendanmaytinhcamtay.vn

24 tam giác đều có cạnh

bằng $\frac{a}{2}$. Mỗi tam giác đều cạnh $\frac{a}{2}$ có diện tích bằng diện tích tam giác "trắng" $A'NB'$ (xem hình vẽ). Suy ra diện tích 6 tam giác trắng vòng ngoài bằng $\frac{6}{24}=\frac{1}{4}$ diện tích lục giác cấp 1 $ABCDEF$.

Vậy diện tích 6 tam giác trắng vòng ngoài là: $\frac{1}{4}\cdot\frac{3a^2\sqrt{3}}{2}$. (1)

b) Tương tự với cách tính trên ta có: $MN=b=\frac{a}{2}$; $c=\frac{b}{2}$.

Diện tích 6 tam giác trắng của lục giác cấp 2 $MNPQRS$ là: $\frac{1}{4}\cdot\frac{3b^2\sqrt{3}}{2}$. (2)

Diện tích 6 tam giác trắng của lục giác cấp 3 là: $\frac{1}{4}\cdot\frac{3c^2\sqrt{3}}{2}$. (3)

Diện tích lục giác trắng trong cùng bằng (với $d=\frac{c}{2}$): $\frac{3d^2\sqrt{3}}{2}$. (4)

Tóm lại ta có:

$S_1=\frac{1}{4}\cdot\frac{3a^2\sqrt{3}}{2}=\frac{3a^2\sqrt{3}}{2^3}$; $S_2=\frac{1}{4}\cdot\frac{3b^2\sqrt{3}}{2}=\frac{1}{4}\cdot\frac{3a^2\sqrt{3}}{2\cdot 2^2}=\frac{3a^2\sqrt{3}}{2^5}$;

$S_3=\frac{1}{4}\cdot\frac{3c^2\sqrt{3}}{2}=\frac{1}{4}\cdot\frac{3a^2\sqrt{3}}{2\cdot 4^2}=\frac{3a^2\sqrt{3}}{2^7}$; $S_4=\frac{3d^2\sqrt{3}}{2}=\frac{3a^2\sqrt{3}}{2\cdot 8^2}=\frac{3a^2\sqrt{3}}{2^7}$.

$S_{trắng}=S_1+S_2+S_3+S_4=3a^2\sqrt{3}\left(\frac{1}{2^3}+\frac{1}{2^5}+\frac{2}{2^7}\right)=\frac{3a^2\sqrt{3}}{2}\,\frac{2^4+2^2+2}{2^6}$.

Ấn phím: 3 [×] 36 [SHIFT] [x^2] [×] 3 [√] [÷] 2 [=] [MODE] [7] [2] (3367.11) [Min]

Vậy $S_{ABCDEF}=3367{,}11\ mm^2$.

Ấn tiếp phím: 2 [SHIFT] [x^y] 4 [+] 2 [SHIFT] [x] [+] 2 [=] [÷] 2 [SHIFT]

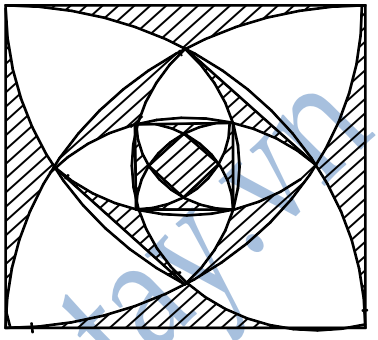
[x^y] 6 [×] [MR] [=] (1157.44) Vậy $S_{trắng}\approx 1157{,}44\ mm^2$.

Ấn tiếp phím: [÷] [MR] [SHIFT] [%] (34.38) Vậy $\frac{S_{trang}}{S_{ABCDEF}}\approx 34{,}38\%$.

Đáp số: 1157,44 mm^2 và 34,38%.

diendanmaytinhcamtay.vn

Bài 5.13. Cho hình vuông cấp một $ABCD$ với độ dài cạnh là $AB = a = 40\,cm$. Lấy A, B, C, D làm tâm, thứ tự vẽ các cung tròn bán kính bằng a, bốn cung tròn cắt nhau tại M, N, P, Q. Tứ giác $MNPQ$ cũng là hình vuông, gọi là hình vuông cấp 2. Tương tự như trên, lấy M, N, P, Q làm tâm vẽ các cung tròn bán kính MN, được 4 giao điểm E, F, G, H là hình vuông cấp 3.



Tương tự làm tiếp được hình vuông cấp 4 $XYZT$ thì dừng lại (xem hình vẽ).

a) Tính diện tích phần hình không bị tô mầu (phần để trắng theo a).

b) Tìm tỉ số phần trăm giữa hai diện tích tô mầu và không tô mầu.

Giải: a) Tính diện tích 4 cánh hoa trắng cấp 1 (bằng 4 viên phân trừ đi 2 lần diện tích hình vuông cấp 2).

$S_1 = 4\cdot\frac{\pi a^2}{4} - \frac{a^2}{2} - 2b^2$ (b là cạnh hình vuông cấp 2).

Tương tự, tính diện tích 4 cánh hoa trắng cấp 2 và cấp 3:

$S_2 = 4(\frac{\pi b^2}{4} - \frac{b^2}{2}) - 2c^2$ (c là cạnh hình vuông cấp 3).

$S_3 = (\frac{\pi c^2}{4} - \frac{c^2}{2}) - 2d^2$ (d là cạnh hình vuông cấp 4).

Rút gọn: $S_1 = a^2(\pi - 2) - 2b^2$; $S_2 = b^2(\pi - 2) - 2c^2$; $S_3 = c^2(\pi - 2) - 2d^2$; $S_{trắng}=S_1+S_2+S_3 = \pi(a^2 + b^2 + c^2)-4(b^2 + c^2)-2(a^2 + d^2)$.

b) Ta có: $MCQ = 30^0$; $b = QM = 2MK = 2a.\sin15^0 = a(2\sin15^0)$.

Tương tự: $c = 2b.\sin15^0 = a(2\sin15^0)^2$; $d = 2c.\sin15^0 = a(2\sin15^0)^3$.

Ký hiệu $x = 2\sin15^0$, ta có: $b = a.x$; $c = ax^2$; $d = ax^3$.

Thay vào công thức tính diện tích $S_{trắng}$ ta được:

diendanmaytinhcamtay.vn

$S_{trắng} = \pi(a^2 + a^2x^2 + a^2x^4) - 4(a^2x^2 + a^2x^4) - 2(a^2 + a^2x^6)$

$= \pi a^2(1 + x^2 + x^4) - 4a^2(x^2 + x^4) - 2a^2(1 + x^6)$

Ấn phím: 15 [o,,,] [sin] [×] 2 [=] [Min] [SHIFT] [x^y] 4 [+] [MR] [SHIFT] [x^2]

[+] 1 [=] [×] [SHIFT] [π] [×] 40 [SHIFT] [x^2] [−] 4 [×] 40 [SHIFT] [x^2] [×]

[(] [MR] [SHIFT] [x^2] [+] [MR] [SHIFT] [x^y] 4 [)] [−] 2 [×] 40 [SHIFT] [x^2] [×]

[(] 1 [+] [MR] [SHIFT] [x^y] 6 [=] [MODE] [7] [2] (1298.36) [Min]

Vậy $S_{trắng} \approx 1298{,}36\ cm^2$.

Bấm tiếp phím: 40 [SHIFT] [x^2] [−] [MR] [=] (301.64)

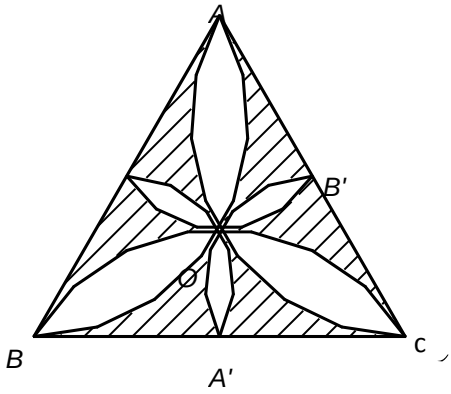
Vậy $S_{gạch\ xọc} \approx 301{,}64\ cm^2$.

Bấm tiếp phím: [÷] [MR] [SHIFT] [%] (23.23)

Vậy $\frac{S_{gach\ xoc}}{S_{trang}} \approx 23{,}23\%$.

Đáp số: $1298{,}36\ cm^2$; $23{,}23\%$.

Bài 5.14. Cho tam giác đều ABC có cạnh là $a = 33{,}33\ cm$ và tâm là O. Vẽ các cung tròn qua hai đỉnh và trọng tâm O của tam giác được hình 3 lá. Gọi A', B', C' là các trung điểm các cạnh BC, CA và AB. Ta lại vẽ các cung tròn qua hai trung điểm và điểm O, ta cũng được hình 3 lá nhỏ hơn.



a) Tính diện tích phần cắt bỏ (hình gạch xọc) của tam giác ABC để được hình 6 lá còn lại.

b) Tính tỉ số phần trăm giữa phần cắt bỏ và diện tích của tam giác ABC.

Giải: $A'B'C'$ cũng là tam giác đều

diendanmaytinhcamtay.vn

nhận O làm tâm (vì AA', BB', CC' cũng là các đường cao, đường trung tuyến của $\Delta\ A'B'C'$). 6 chiếc lá chỉ có điểm chung duy nhất là O, nghĩa là không có phần diện tích chung.

Mỗi viên phân có góc ở tâm bằng 60^0, bán kính bằng $\frac{2}{3}$ đường cao tam giác đều. Gọi S_1 là diện tích 1 viên phân. Khi ấy

$$S_1 = \frac{\pi OA^2}{6} - \frac{OA^2\sqrt{3}}{4} = \frac{OA^2}{12}(2\pi - 3\sqrt{3}).$$

Ta có: $OA = \frac{2}{3}\frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{a\sqrt{3}}{3}$.

Gọi S là diện tích 3 lá lớn, S' là diện tích 3 lá nhỏ. Khi ấy:

$$S = 6S_1 = \frac{OA^2}{2}(2\pi - 3\sqrt{3}) = \frac{a^2}{6}(2\pi - 3\sqrt{3}).$$

Gọi cạnh tam giác đều $A'B'C'$ là b, tương tự ta cũng có:

$$S' = \frac{b^2}{6}(2\pi - 3\sqrt{3}) = \frac{a^2}{24}(2\pi - 3\sqrt{3}).$$

Tổng diện tích 6 lá là: $S + S' = (2\pi - 3\sqrt{3})(\frac{a^2}{6} + \frac{a^2}{24})$.

Diện tích phần gạch xọc (phần cắt bỏ) là S''.

$$S'' = S_{\Delta ABC} - (S + S') = \frac{a^2\sqrt{3}}{4} - (2\pi - 3\sqrt{3})(\frac{a^2}{6} + \frac{a^2}{24}) = (\frac{7\sqrt{3}}{8} - \frac{5}{12}\pi)a^2.$$

Tính $S_{\Delta ABC}$: 33.33 $\boxed{\text{SHIFT}}$ $\boxed{x^2}$ $\boxed{\times}$ 3 $\boxed{\sqrt{\ }}$ $\boxed{\div}$ 4 $\boxed{=}$ (481.0290040) $\boxed{\text{Min}}$

Tính S'': 7 $\boxed{\times}$ 3 $\boxed{\sqrt{\ }}$ $\boxed{\div}$ 8 $\boxed{-}$ 5 $\boxed{\div}$ 12 $\boxed{\times}$ $\boxed{\pi}$ $\boxed{=}$ $\boxed{\times}$ 33.33 $\boxed{\text{SHIFT}}$ $\boxed{x^2}$ $\boxed{=}$ (229.4513446)

Vậy $S'' \approx 229{,}45\ cm^2$.

Ấn tiếp phím để tính $\frac{S''}{S_{ABC}}$: $\boxed{\div}$ $\boxed{\text{MR}}$ $\boxed{\text{SHIFT}}$ $\boxed{\%}$ *Kết quả*: 47.70

Đáp số: $S'' \approx 229{,}45\ cm^2$; $\frac{S''}{S_{ABC}} \approx 47{,}70\ \%$.

diendanmaytinhcamtay.vn