CHUYÊN ĐỀ ỨNG DỤNG TIẾP TUYẾN GIẢI DẠNG TOÁN BẤT ĐẲNG THỨC THÔNG QUA MÁY TÍNH CẦM TAY

I. PHƯƠNG PHÁP TIẾP TUYẾN CHỨNG MINH BẤT ĐẲNG THỨC

Cho hàm số $f(x)$ xác định, liên tục và có đạo hàm trên K . Khi đó tiếp tuyến tại một điểm $x_0 \in K$ có phương trình $y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$ luôn nằm trên (hoặc luôn nằm dưới) đồ thị hàm số f , nên ta có :

$f(x) \le f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$ (hoặc $f(x) \ge f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$) với mọi $x \in K$.

Từ tính chất này, ta thấy với mọi $x_1 + x_2 + ... + x_n \in K$ ta có :

$$f(x_1) + f(x_2) + ... + f(x_n) \le f'(x_0)(x_1 + x_2 + ... + x_n - nx_0) + nf(x_0)$$

Như vậy, nếu một bất đẳng thức có dạng "tổng hàm" như ở vế trái của bất đẳng thức trên, và có giả thiết $x_1 + x_2 + ... + x_n = nx_0$ với đẳng thức xảy ra khi $x_1 = x_2 = ... = x_n = x_0$, thì ta có thể ứng dụng phương pháp tiếp tuyến.

II. BÀI TOÁN ÁP DỤNG

Bài toán 1:

Cho các số thực dương a, b, c, d thỏa $a + b + c + d = 1$

Tìm giá trị nhỏ nhất của $P = 6(a^3 + b^3 + c^3 + d^3) - (a^2 + b^2 + c^2 + d^2)$

Giải trên máy tính casio fx 570VN PLUS

Từ giả thiết ta suy ra $a, b, c, d \in (0;1)$

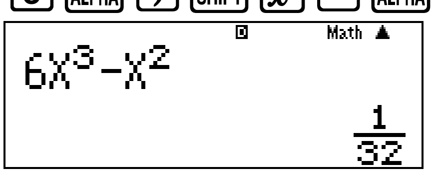
$P = (6a^3 - a^2) + (6b^3 - b^2) + (6c^3 - c^2) + (6d^3 - d^2)$ nên hàm số cần chọn là $f(x) = 6x^3 - x^2$, với $x \in (0;1)$

Khi đó $P = f(x) + f(b) + f(c) + f(d)$

Ta dự đoán P đạt giá trị nhỏ nhất khi $a = b = c = d = \frac{1}{4}$

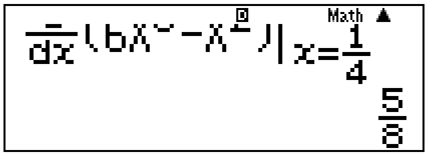
Vậy điểm $x_0 = \frac{1}{4}$ tìm y_0 bấm

6 ALPHA) SHIFT x^2 − ALPHA) x^2 CALC 1 ▭ 4 =



Được $y_0 = \dfrac{1}{32}$

Tìm $f'\left(\dfrac{1}{4}\right)$ bấm SHIFT $\frac{d}{dx}\square$ 6 ALPHA) SHIFT x^2 − ALPHA) x^2 ▶ 1 $\frac{\square}{\square}$ 4 =



Được $f'\left(\dfrac{1}{4}\right) = \dfrac{-15}{8}$

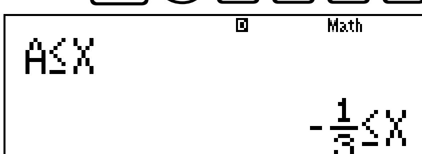
Phương trình tiếp tuyến là: $y = f'\left(\dfrac{1}{4}\right)\left(x - \dfrac{1}{4}\right) + \dfrac{1}{32} = \dfrac{5x-1}{8}$

Theo yêu tìm min của P ta có thể đoán $6x^3 - x^2 \geq \dfrac{5x-1}{8}$ (hoặc có thể áp dụng tính lồi lõm của hàm số)

$$6x^3 - x^2 \geq \frac{5x-1}{8} \Leftrightarrow 48x^3 - 8x^2 - 5x + 1 \geq 0, \forall x \in (0;1)$$

Có thể kiểm tra lại như sau:

Bấm MODE ▼ 1 2 3 4 8 = − 8 = − 5 = 1 = =



Máy tính giải ra $48x^3 - 8x^2 - 5x + 1 \geq 0, \forall x \geq -\dfrac{1}{3}$ nên

$48x^3 - 8x^2 - 5x + 1 \geq 0, \forall x \in (0;1)$ là hiển nhiên.

Ta suy ra được

$$\begin{cases} f(a) \geq \dfrac{5a-1}{8} \\ f(b) \geq \dfrac{5b-1}{8} \\ f(c) \geq \dfrac{5c-1}{8} \\ f(d) \geq \dfrac{5c-1}{8} \end{cases} \Leftrightarrow f(a) + f(b) + f(c) + f(d) \geq \frac{5(a+b+c+d)-4}{8} = \frac{1}{8}$$

Dấu "=" xảy ra khi $a=b=c=d=\dfrac{1}{4}$

Vậy $MinP=\dfrac{1}{8}$ khi $a=b=c=d=\dfrac{1}{4}$

Bài làm trên là hướng dẫn áp dụng máy tính cầm tay nên hơi dài, còn lúc trình bày thì bỏ qua các bước máy tính nên sẽ ngắn hơn nhiều.

Từ bài toán trên ta rút ra được các bước làm nhanh gọn như sau:

Bước 1: Tìm hàm số $f(x)$ và tập xác định K của hàm số

Bước 2: Xác định "điểm rơi x_0",tìm phương trình tiếp tuyến $y=mx+n$

$m=f'(x_0)$, ứng dụng tính năng tính đạo hàm của máy tính: SHIFT ∫

$n=f(x_0)-m.x_0$

Bước 3: Tùy theo yêu cầu bài toán ta chứng minh $f(x)\geq mx+n$ (hoặc $f(x)\leq mx+n$).

Bước 4: Trình bày lời giải

Bài toán 2:

Cho $a,b,c>0$ và $a+b+c=3$. Chứng minh rằng:

$$\frac{a^2+9}{2a^2+(b+c)^2}+\frac{b^2+9}{2b^2+(c+a)^2}+\frac{c^2+9}{2c^2+(a+b)^2}\leq 5$$

Giải trên máy tính casio fx 570VN PLUS

$$\frac{a^2+9}{2a^2+(b+c)^2}+\frac{b^2+9}{2b^2+(c+a)^2}+\frac{c^2+9}{2c^2+(a+b)^2}\leq 5$$

$$\Leftrightarrow \frac{a^2+9}{2a^2+(3-a)^2}+\frac{b^2+9}{2b^2+(3-b)^2}+\frac{c^2+9}{2c^2+(3-c)^2}\leq 5$$

Bước 1: Ta chọn hàm số $f(x)=\dfrac{x^2+9}{2x^2+(3-x)^2}, \forall x\in(0;3)$ (do $a,b,c\in(0;3)$)

Ta dự đoán đẳng thức xảy ra khi $a=b=c=1$ nên $x_0=1$

Bước 2: Tìm phương trình tiếp tuyến $y=mx+n$

$m = f'(x_0)$ Ghi vào màn hình

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{x^2+9}{2x^2+(3-x)^2}\right)\Bigg|_{x=1}$$

Bấm $\boxed{=}$ được $m = 0,3333333333$ hay $m = \frac{1}{3}$

$n = f(x_0) - m.x_0$

Bấm tiếp $\boxed{\blacktriangleright}$ $\boxed{DEL}$

$$\frac{x^2+9}{2x^2+(3-x)^2}$$

Bấm $\boxed{CALC}$ $\boxed{1}$ $\boxed{=}$ $\boxed{-}$ $\boxed{1}$ $\boxed{\frac{\blacksquare}{\square}}$ $\boxed{3}$ $\boxed{=}$ được $n = \frac{4}{3}$

Ta tìm được phương trình tiếp tuyến $y = \frac{x+4}{3}$

Bước 3: Ta chứng minh $\frac{x^2+9}{2x^2+(3-x)^2} \le \frac{x+4}{3}, \forall x \in (0;3)$

$$\frac{x^2+9}{2x^2+(3-x)^2} - \frac{x+4}{3} = \frac{x^2+9}{3x^2-6x+9} - \frac{x+4}{3} = -\frac{x^3+x^2-5x+3}{3x^2-6x+9}$$

(**Để quy đồng nhanh ta làm như sau:**

Ghi vào màn hình : $\left(\frac{x^2+9}{3x^2-6x+9} - \frac{x+4}{3}\right)(3x^2-6x+9)$

Bấm $\boxed{CALC}$ $\boxed{1}$ $\boxed{0}$ $\boxed{0}$ $\boxed{0}$ $\boxed{=}$

Được -1000995003 ta suy ra được tử thức x^3+x^2-5x+3)

$$-\frac{x^3+x^2-5x+3}{3x^2-6x+9} = -\frac{(x+3)(x-1)^2}{3(x-1)^2+6} \le 0, \forall x \in (0;3)$$

Các phân tích nhanh $x^3+x^2-5x+3 = (x+3)(x-1)^2$ ta ứng dụng tính năng giải bất phương trình như sau:

Bấm $\boxed{MODE}$ $\boxed{\blacktriangledown}$ $\boxed{1}$ $\boxed{2}$ $\boxed{4}$ $\boxed{1}$ $\boxed{=}$ $\boxed{1}$ $\boxed{=}$ $\boxed{-}$ $\boxed{5}$ $\boxed{=}$ $\boxed{3}$ $\boxed{=}$ $\boxed{=}$ được $x \le -3, x = 1$

Phương trình bậc 3 có 2 nghiệm thì chắc chắn sẽ có nghiệm kép, dựa vào

$x \le -3, x = 1$ thì $x^3 + x^2 - 5x + 3 \le 0$ nên ta suy ra nghiệm kép là $x = 1$

Nên $x^3 + x^2 - 5x + 3 = (x+3)(x-1)^2$

Các phân tích nhanh $3x^2 - 6x + 9 = 3(x-1)^2 + 6$ ta ứng dụng tính tìm max, min trong giải phương trình bậc 2 như sau:

Bấm MODE 5 3 3 = − 6 = 9 = = =

Bấm = được $X - \text{Value Minimum} = 1$

Bấm = được $Y - \text{Value Minimum} = 6$

Ta suy ra được $3x^2 - 6x + 9 = 3(x-1)^2 + 6$

Bước 4: Trình bày lời giải

Ta có

$$\frac{a^2+9}{2a^2+(3-a)^2} - \frac{a+4}{3} = -\frac{a^3+a^2-5a+3}{3a^2-6a+9} = -\frac{(a+3)(a-1)^2}{3(a-1)^2+6} \le 0, \forall a \in (0;3)$$

$$\Rightarrow \frac{a^2+9}{2a^2+(3-a)^2} \le \frac{a+4}{3}, \forall a \in (0;3) \quad (1)$$

CMTT:

$$\frac{b^2+9}{2b^2+(3-b)^2} \le \frac{b+4}{3}, \forall b \in (0;3) \quad (2)$$

$$\frac{c^2+9}{2c^2+(3-c)^2} \le \frac{c+4}{3}, \forall c \in (0;3) \quad (3)$$

Từ (1), (2), (3) suy ra được

$$\frac{a^2+9}{2a^2+(3-a)^2} + \frac{b^2+9}{2b^2+(3-b)^2} + \frac{c^2+9}{2c^2+(3-c)^2} \le \frac{(a+b+c)+12}{3} = 5$$

Hay $\dfrac{a^2+9}{2a^2+(b+c)^2} + \dfrac{b^2+9}{2b^2+(c+a)^2} + \dfrac{c^2+9}{2c^2+(a+b)^2} \le 5$

Đẳng thức xảy ra khi $a = b = c = 1$

Nhận xét: Từ bước 1 đến bước 3 chỉ là bước hướng dẫn làm ngoài nháp, giúp ta ứng dụng giải nhanh trên máy tính cầm tay. Do hướng dẫn nên ta thấy bài toán dài thức ra khi làm ngoài nháp chỉ khoảng mấy dòng, và ở bước 4 là lời giải rất ngắn gọn.