CÁC CHỮ SỐ CUỐI CỦA LŨY THỪA

Tổng quát

Cho a, k là số nguyên dương

1. ***6, 76, 376, 9376, 09376 . . . lần lượt là các chữ số cuối của***

$a^{4k}, a^{20k}, a^{100k}, a^{500k}, a^{5000k}$***,. . . trong đó a có chứa thừa số 2 và không chứa thừa số 5.***

2. ***0625, 890625, 2890625, 12890625, . . . lần lượt là các chữ số cuối của*** $a^{4k}, a^{16k}, a^{32k}, a^{64k}$***,. . . trong đó a có chứa thừa số 5 và không chứa thừa số 2.***

3. ***1, 01, 001, 0001, 00001 . . . lần lượt là các chữ số cuối của*** $a^{4k}, a^{20k}, a^{100k}, a^{500k}, a^{5000k}$***. . . trong đó a không chứa thừa số 2 và 5.***

***Ví dụ*:**

$8^{14} \equiv 8^{4\times3+2} \equiv 6\times8^2 \equiv 4 \pmod{10}$ (vì $8^{4k} \equiv 6$)

$8^{65} \equiv 8^{20\times3+5} \equiv 8^5 \equiv 76\times8^5 \equiv 68 \pmod{100}$ (vì $8^{20k} \equiv 76$)

$14^{302} \equiv 14^{20\times15+2} \equiv 376\times14^2 \equiv 696 \pmod{1000}$ (vì $14^{20k} \equiv 376$)

$18^{2003} \equiv 18^{500\times4+3} \equiv 9376\times18^3 \equiv 0832 \pmod{1000}$ (vì $18^{500k} \equiv 9376$)

$105^{35} \equiv 105^{32+3} \equiv 2890625\times105^3 \equiv 9765625 \pmod{10^7}$ (vì $105^{32k} \equiv 2890625$)

$13^{54} \equiv 13^{4\times13+2} \equiv 13^2 \equiv 9 \pmod{10}$

$13^{603} \equiv 13^{100\times6+3} \equiv 13^3 \equiv 197 \pmod{1000}$

$13^{2503} \equiv 13^{2500+3} \equiv 13^3 \equiv 2197 \pmod{1000}$

$7^{83} \equiv 7^{20\times4+3} \equiv 7^3 \equiv 43 \pmod{100}$

1. ***Riêng các chữ số cuối*** *của một số* a^k *với a không chứa thừa số 5 kể sau (và nhiều số khác nữa như các số 11, 43, 57, . . .) có k lấy chu kì nhỏ hơn nhưng lần lượt theo thứ tự phải là ước của 4, 20,100, 500, . . .*

Đặc biệt khi để ý đến các chữ số cuối thì

$$6^k \equiv 6, 6^{5k} \equiv 76, 6^{25k} \equiv 376, 6^{125k} \equiv 9376, 6^{625k} \equiv 09376, \ldots$$
$$7^{4k} \equiv 01, 7^{20k} \equiv 001, 7^{100k} \equiv 0001, 7^{500k} \equiv 00001, \ldots$$
$$57^{4k} \equiv 001, 57^{20k} \equiv 0001, 57^{100k} \equiv 00001, \ldots$$

...

Ví dụ:

$6^{79} \equiv 6^{25\times 3+4} \equiv 376\times 6^4 \equiv 296$ (vì $6^{25k} \equiv 376$) *(mod 1000)*

$7^{54} \equiv 7^{4\times 13+2} \equiv 7^2 \equiv 49$ *(mod 1000)*

$7^{83} \equiv 7^{20\times 4+3} \equiv 7^3 \equiv 343$ *(mod 1000)*

$7^{806} \equiv 7^{100\times 8+6} \equiv 7^6 \equiv 7649$ *(mod 10000)*

$57^{62} \equiv 57^{20\times 3+2} \equiv 57^2 \equiv 3249$ *(mod 10000)*

Ghi chú:

2. *Khi số chữ số cuối cần tìm nhỏ hơn hay bằng với số mũ sau khi đã loại chu kì thì khỏi nhân với số lũy thừa bất biến.*
3. *Khi nhân thì phải nhân số chữ số của lũy thừa bất biến hơn hay bằng số chữ số cuối cần tìm.*
4. *Gặp bài tìm số chữ số cuối nhiều hơn lũy thừa từ đầu thì phải dùng phép đồng dư.*
5. *Các số 9376 và 0625 có thể kéo dài bên phải thành*

   . . . 40081787109376 ,   . . . 59918212890625

Và gọi đó là số có đuôi lũy thừa bất biến còn nhiều ứng dụng khác (xin xem thêm tài liệu về các chữ số cuối của lũy thừa cùng tác giả)

Các ví dụ trên có thể giải bằng phép đồng dư nhưng dài hơn

Nguyễn Trường Chấng

(sưu tầm và mở rộng)